Speltheorie

26 januari 2016 , 8.30-11.30

Universiteit Utrecht, Mathematisch Instituut

- Zet op elk blad dat je inlevert je naam en studentnummer.
- Als je een onderdeel niet kunt maken, mag je het wel gebruiken in de volgende onderdelen.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je er aan komt.

Opgave 1, 25 pt.
Beschouw het coöperatieve spel (N, ν) met $N = \{1, 2, 3\}$ en $\nu(\{1\}) = \nu(\{2\}) = \nu(\{3\}) = 0$, $\nu(\{1, 2\}) = 40$, $\nu(\{1, 3\}) = 60$, $\nu(\{2, 3\}) = 80$ en $\nu(\{1, 2, 3\}) = 150$.

(a) (10 pt.) Geef een grafische voorstelling van de kern van dit spel.

(b) (5 pt.) Bepaal de Shapley waarde van dit spel.

(b) (10 pt.) Bepaal de nucleolus van dit spel.

Opgave 2, 25 pt.
Beschouw het symmetrische Hawk-Dove spel, met payoff matrix voor rij gegeven door:

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} H & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} .$$

(a) (10 pt.) Bepaal de replicatorvergelijking voor de fractie H-spelers in dit spel en teken het bijbehorende faseplaatje.

(b) (5 pt.) Formuleer een stelling waarmee uit de replicatorvergelijking voor een symmetrisch 2×2 spel kan worden afgeleid welk (symmetrisch) paar strategieën een ESS vormen.
Pas dit toe op dit spel en geef alle ESS.

(c) (10 pt.) Bewijs voor elk in (b) gevonden paar strategieën dat ze een ESS vormen, zonder gebruik te maken van de replicatorvergelijking.

Opgave 3, 30 pt.
Beschouw het bimatrix spel (B, B'), met:

$$B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} X & Y \end{array} \\ \begin{array}{c} X \\ Y \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \quad ,$$

waarbij B' de gespiegelde is van B.
Dit spel wordt oneindig vaak herhaald, waarbij we de gediscounte payoff π_i voor speler $i = 1, 2$, definieren als:

$$\pi_i = (1 - \delta) \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k p_i(t = k) \, ,$$

met $p_i(t = k)$ de payoff voor speler i op tijdstip k. Hierbij is $0 < \delta < 1$.
Definieer de volgende strategieën:
$COPY$: Op $t = 0$, speel Y. Op $t = k > 0$, kopieer de strategie die de andere speler speelde op $t = k - 1$.
$GRIM$: Op $t = 0$, speel Y. Op $t = k > 0$, speel Y dan en slechts dan als de geschiedenis tot dan er uit ziet als $YY, YY, \ldots, YY$. Anders speel X.
Gebruik bij het beantwoorden van onderstaande vragen dat het bi-matrix spel symmetrisch is.

(a) (10 pt.) Bepaal alle $0 < \delta < 1$ waarvoor $(GRIM, GRIM)$ een NE is.

(b) (10 pt.) Bepaal alle $0 < \delta < 1$ waarvoor $(COPY, COPY)$ een NE is.

(c) (10 pt.) Bepaal alle $0 < \delta < 1$ waarvoor $(COPY, COPY)$ een SPE is.

Opgave 4, 20 pt.
In een *all pay auction* met twee spelers wordt een bepaald object geveild. Het object gaat naar de hoogste bieder en in het geval van een gelijk bod naar speler 1. Echter, alle spelers betalen hun bod (dat niet-negatief moet zijn) aan de veilingmeester, ook als ze het object niet hebben gewonnen. Speler $i = 1, 2$ hecht een waarde $0 \leq v_i \leq 1$ aan het object en doet een bod b_i. De payoff voor de winnende speler is $\pi_i = v_i - b_i$, voor de verliezende speler $\pi_i = -b_i$. Neem aan dat $v_1 \geq v_2$ en dat deze waarden bekend zijn.

(a) (10 pt.) Laat zien dat er geen NE bestaat. Hint: maak een diagram van de *best replies*.

(b) (10 pt.) Bepaal alle NE, of laat zien dat er geen bestaan, als alleen de winnende bieder zijn bod aan de veilingmeester hoeft te betalen.