

## UITWERKING TENTAMEN DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WISB231)

12 april 2018, 13:30-16:30 uur

### Opgave 1 [30 pt]

(a) [20 pt] Onderzoek of het stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} y_1'' = y_2, \\ y_2'' = y_1, \end{cases} \quad (1)$$

een niet-triviale oplossing heeft waarvoor  $y_1(0) = y_2(0) = y_1(\pi) = y_2(\pi) = 0$ .

**Methodie I:** Iedere oplossing  $y_1(x)$  van (1) voldoet aan de 4de-orde differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten

$$\frac{d^4 y_1}{dx^4} - y_1 = 0. \quad (2)$$

Deze heeft de karakteristieke vergelijking

$$\lambda^4 - 1 = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

met enkelvoudige wortels  $\lambda_{1,2} = \pm 1$  en  $\lambda_{3,4} = \pm i$ . De algemene oplossing van (2) is dus

$$y_1(x) = Ae^x + Be^{-x} + C \cos x + D \sin x, \quad (3)$$

waarin  $A, B, C, D$  reële constanten zijn. Wegens (1), geldt  $y_2(x) = y_1''(x)$  zodat

$$y_2(x) = A e^x + B e^{-x} - C \cos x - D \sin x. \quad (4)$$

De functies (3) en (4) definiëren de algemene oplossing van (1).

De homogene randvoorwaarden  $y_1(0) = y_2(0) = y_1(\pi) = y_2(\pi) = 0$  zijn equivalent met het stelsel van vier lineaire algebraïsche vergelijkingen

$$\begin{cases} A + B + C = 0, \\ A + B - C = 0, \\ Ae^\pi + Be^{-\pi} - C = 0, \\ Ae^\pi + Be^{-\pi} + C = 0, \end{cases} \quad (5)$$

voor  $(A, B, C, D)$ . Merk op dat  $D$  niet voorkomt in de vergelijkingen en dus willekeurig gekozen kan worden, zo ook  $D \neq 0$ . Uit de eerste twee vergelijkingen volgt dat  $C = 0$ . Voor  $(A, B)$  hebben we het stelsel

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ Ae^\pi + Be^{-\pi} = 0, \end{cases}$$

dat alleen de triviale oplossing  $A = B = 0$  heeft. Hieruit volgt dat

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \sin x \\ -D \sin x \end{pmatrix}, \quad D \neq 0,$$

een niet-triviale oplossing is van het homogene probleem (1) met randvoorwaarden

$$y_1(0) = y_2(0) = y_1(\pi) = y_2(\pi) = 0.$$

**Methode II:** Het stelsel (1) is equivalent met het stelsel van eerste-orde lineaire differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} y_1' &= z_1, \\ z_1' &= y_2, \\ y_2' &= z_2, \\ z_2' &= y_1. \end{cases}$$

Met  $Y = (y_1, z_1, y_2, z_2)$ , kunnen we dit stelsel herschrijven als  $Y' = AY$ , waarin

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

De karakteristieke vergelijking van  $A$  is

$$\lambda^4 - 1 = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

met vier enkelvoudige wortels  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = i, \lambda_4 = -i$ . Deze zijn de eigenwaarden van  $A$  met de eigenvectoren

$$\eta^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \eta^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \eta^{(3)} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}, \eta^{(4)} = \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix},$$

respectievelijk. De fundamentele matrix is

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} e^x & -e^{-x} & ie^{ix} & -ie^{-ix} \\ e^x & e^{-x} & -e^{ix} & -e^{-ix} \\ e^x & -e^{-x} & -ie^{ix} & ie^{-ix} \\ e^x & e^{-x} & e^{ix} & e^{-ix} \end{pmatrix}$$

met

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -i & i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \Psi^{-1}(0) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -i & -1 & i & 1 \\ i & -1 & -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Dus

$$e^{xA} = \Psi(x)\Psi^{-1}(0) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^x + 2 \cos x + e^{-x} & e^x + 2 \sin x - e^{-x} & e^x - 2 \cos x + e^{-x} & e^x - 2 \sin x - e^{-x} \\ e^x - 2 \sin x - e^{-x} & e^x + 2 \cos x + e^{-x} & e^x + 2 \sin x - e^{-x} & e^x - 2 \cos x + e^{-x} \\ e^x - 2 \cos x + e^{-x} & e^x - 2 \sin x - e^{-x} & e^x + 2 \cos x + e^{-x} & e^x + 2 \sin x - e^{-x} \\ e^x + 2 \sin x - e^{-x} & e^x - 2 \cos x + e^{-x} & e^x - 2 \sin x - e^{-x} & e^x + 2 \cos x + e^{-x} \end{pmatrix}$$

De algemene oplossing van  $Y' = AY$  is dan

$$Y(x) = e^{xA} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix},$$

waarin  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  willekeurig zijn. We hebben

$$\begin{aligned} y_1(x) = Y_1(x) &= \frac{1}{4} [(a+b+c+d)e^x + (a-b+c-d)e^{-x} + 2(a-c)\cos x + 2(b-d)\sin x], \\ y_2(x) = Y_3(x) &= \frac{1}{4} [(a+b+c+d)e^x + (a-b+c-d)e^{-x} - 2(a-c)\cos x - 2(b-d)\sin x], \end{aligned}$$

als de algemene oplossing van (1).

De homogene randvoorwaarden  $y_1(0) = y_2(0) = y_1(\pi) = y_2(\pi) = 0$  zijn equivalent met het stelsel van vier lineaire algebraïsche vergelijkingen

$$\begin{cases} a &= 0, \\ c &= 0, \\ \frac{1}{4}(a+b+c+d)e^\pi + \frac{1}{4}(a-b+c-d)e^{-\pi} - \frac{1}{2}(a-c) &= 0, \\ \frac{1}{4}(a+b+c+d)e^\pi + \frac{1}{4}(a-b+c-d)e^{-\pi} + \frac{1}{2}(a-c) &= 0. \end{cases} \quad (7)$$

Dus  $a = c = 0$  en dan  $(b + d)(e^\pi - e^{-\pi}) = 0$ , waaruit blijkt dat  $d = -b$  met willekeurig  $b \in \mathbb{R}$ . Hieruit volgt dat het homogene probleem (1) met randvoorwaarden

$$y_1(0) = y_2(0) = y_1(\pi) = y_2(\pi) = 0$$

de niet-triviale oplossing

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1(x) \\ Y_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \sin x \\ -b \sin x \end{pmatrix}$$

heeft met iedere  $b \neq 0$ .

- (b) [10 pt] Hoeveel oplossingen heeft (1) met  $y_1(0) = y_2(0) = y_1(\pi) = 0$  maar  $y_2(\pi) = 1$  ?

Uit onderdeel (a) volgt dat dit inhomogene randwaardeprobleem óf geen oplossingen heeft óf wel een oplossing heeft, maar die niet eenduidig is. In ons geval heeft (1) geen oplossingen met  $y_1(0) = y_2(0) = y_1(\pi) = 0$  en  $y_2(\pi) = 1$ .

**Methode I (vervolg):** Uit onderdeel (a) volgt dat het randwaarde probleem equivalent is met het stelsel

$$\begin{cases} A + B + C = 0, \\ A + B - C = 0, \\ Ae^\pi + Be^{-\pi} - C = 0, \\ Ae^\pi + Be^{-\pi} + C = 1, \end{cases} \quad (8)$$

voor  $(A, B, C, D) \in \mathbb{R}$ . Dus  $C = 0$  en  $B = -A$ . Verder moeten we hebben dat

$$\begin{cases} A(e^\pi - e^{-\pi}) = 0, \\ A(e^\pi - e^{-\pi}) = 1. \end{cases}$$

Er is geen  $A \in \mathbb{R}$  die voldoet aan beide vergelijkingen. Dus heeft (8) geen oplossingen. Hieruit volgt dat het inhomogene randwaardeprobleem ook geen oplossingen heeft.

**Methode II (vervolg):** Uit onderdeel (a) volgt dat het randwaardeprobleem equivalent is met het stelsel

$$\begin{cases} a = 0, \\ c = 0, \\ \frac{1}{4}(a + b + c + d)e^\pi + \frac{1}{4}(a - b + c - d)e^{-\pi} - \frac{1}{2}(a - c) = 0, \\ \frac{1}{4}(a + b + c + d)e^\pi + \frac{1}{4}(a - b + c - d)e^{-\pi} + \frac{1}{2}(a - c) = 1, \end{cases} \quad (9)$$

voor  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ . We moeten dus hebben

$$\begin{cases} (b + d)(e^\pi - e^{-\pi}) = 0, \\ (b + d)(e^\pi - e^{-\pi}) = 1. \end{cases}$$

Er zijn geen  $b, d \in \mathbb{R}^2$  die voldoen aan beide vergelijkingen. Dus heeft (9) geen oplossingen. Hieruit volgt dat het inhomogene randwaardeprobleem ook geen oplossingen heeft.

**Opgave 2** [30 pt] Zij  $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$  met  $\omega > 0$  en zij  $A$  een  $2 \times 2$  reële matrix met complexe eigenwaarden  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$ . Bewijs dat

$$e^{tA} = e^{\alpha t} \left[ \cos(\omega t)E + \frac{\sin(\omega t)}{\omega} B \right], \quad (10)$$

waarin  $B = A - \alpha E$  en  $E$  de  $2 \times 2$  eenheidsmatrix is. *Hint:* Laat eerst zien dat (10) klopt voor

$$A_0 = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix}$$

en gebruik daarna dat  $A = P^{-1}A_0P$  voor een inverteerbare reële  $2 \times 2$  matrix  $P$ .

We hebben

$$A_0 = \alpha E + B_0 \quad \text{met} \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Omdat  $EB_0 = B_0E$  voor iedere matrix  $B_0 \in M_2(\mathbb{R})$ , geldt

$$e^{tA_0} = e^{t\alpha E} e^{tB_0} = e^{\alpha t} e^{tB_0}.$$

Eerst bewijzen we dat

$$e^{tB_0} = \cos(\omega t)E + \frac{\sin(\omega t)}{\omega} B_0. \quad (11)$$

**Methode I:** Er geldt

$$B_0^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 E.$$

Dus

$$\begin{aligned} e^{tB_0} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B_0^k \\ &= E + tB_0 + \frac{t^2}{2!} B_0^2 + \frac{t^3}{3!} B_0^3 + \frac{t^4}{4!} B_0^4 + \frac{t^5}{5!} B_0^5 + \frac{t^6}{6!} B_0^6 + \frac{t^7}{7!} B_0^7 + \dots \\ &= \left( E - \frac{\omega^2 t^2}{2!} E + \frac{\omega^4 t^4}{4!} E - \frac{\omega^6 t^6}{6!} E + \dots \right) + \left( tB_0 - \frac{\omega^2 t^3}{3!} B_0 + \frac{\omega^4 t^5}{5!} B_0 - \frac{\omega^6 t^7}{7!} B_0 + \dots \right) \\ &= \left( 1 - \frac{\omega^2 t^2}{2!} + \frac{\omega^4 t^4}{4!} - \frac{\omega^6 t^6}{6!} + \dots \right) E + \frac{1}{\omega} \left( \omega t - \frac{\omega^3 t^3}{3!} + \frac{\omega^5 t^5}{5!} - \frac{\omega^7 t^7}{7!} + \dots \right) B_0 \\ &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{2k}}{(2k)!} \right) E + \frac{1}{\omega} \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) B_0 \\ &= \cos(\omega t)E + \frac{\sin(\omega t)}{\omega} B_0. \end{aligned}$$

We kunnen de sommatie op willekeurige volgorde doen omdat

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} \|B_0\|^k = e^{|t| \|B_0\|} < \infty.$$

**Methode II:** De eigenwaarden van  $B_0$  zijn  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ . De bijbehorende eigenvectoren zijn

$$\eta^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \eta^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

De fundamentele matrix van  $\dot{y} = B_0 y$  is dus

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & e^{-i\omega t} \\ -ie^{i\omega t} & ie^{-i\omega t} \end{pmatrix}$$

met

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \Psi^{-1}(0) = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} e^{tB_0} &= \Psi(t)\Psi^{-1}(0) = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & e^{-i\omega t} \\ -ie^{i\omega t} & ie^{-i\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) & -\frac{1}{2}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \\ -\frac{1}{2}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) & \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \\ &= (\cos \omega t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\sin \omega t}{\omega} \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} = (\cos \omega t)E + \frac{\sin \omega t}{\omega} B_0. \end{aligned}$$

**Methode III:** Er kan direct opgemerkt worden dat de stroming naar tijd  $t$  van de harmonische oscillator

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\omega y, \\ \dot{y} &= \omega x \end{cases}$$

het draaien is in het  $(x, y)$ -vlak over de hoek  $\omega t$  tegen de klok in, zodat

$$e^{tB_0} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} = (\cos \omega t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\sin \omega t}{\omega} \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} = (\cos \omega t)E + \frac{\sin \omega t}{\omega} B_0.$$

Dus inderdaad

$$e^{tA_0} = e^{\alpha t} \left[ (\cos \omega t)E + \frac{\sin \omega t}{\omega} B_0 \right].$$

en dan

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{tP^{-1}A_0P} = P^{-1}e^{tA_0}P = e^{\alpha t}P^{-1} \left[ (\cos \omega t)E + \frac{\sin \omega t}{\omega} B_0 \right] P \\ &= e^{\alpha t} \left[ (\cos \omega t)P^{-1}EP + \frac{\sin \omega t}{\omega} P^{-1}B_0P \right] \\ &= e^{\alpha t} \left[ (\cos \omega t)E + \frac{\sin \omega t}{\omega} B \right], \end{aligned}$$

omdat

$$P^{-1}B_0P = P^{-1}(A_0 - \alpha E)P = P^{-1}A_0P - \alpha P^{-1}EP = A - \alpha E = B.$$

**Opgave 3** [40 pt] Beschouw het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \dot{q} &= -p + q^2 - p^2, \\ \dot{p} &= q - 2qp. \end{cases} \quad (12)$$

(a) [5 pt] Bepaal alle rustpunten van (12) in het  $(q, p)$ -vlak.

De rustpunten voldoen aan het stelsel

$$\begin{cases} -p + q^2 - p^2 &= 0, \\ q - 2qp &= 0. \end{cases}$$

De tweede vergelijking impliceert dat  $q = 0$  of  $p = \frac{1}{2}$ . Met  $q = 0$  wordt de eerste vergelijking  $p + p^2 = 0$ , zodat  $p = 0$  of  $p = -1$ . Met  $p = \frac{1}{2}$  impliceert de eerste vergelijking dat

$$q^2 = \frac{3}{4},$$

waaruit volgt dat  $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$  of  $q = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Dus heeft het stelsel (12) slechts vier rustpunten:

$$E_0 = (0, 0), \quad E_1 = (0, -1), \quad E_2 = \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad E_3 = \left( -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

(b) [5 pt] Bewijs dat (12) herschreven kan worden als een Hamilton-stelsel

$$\begin{cases} \dot{q} &= \frac{\partial H(q, p)}{\partial p}, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q}, \end{cases}$$

en vind de Hamiltonfunctie  $H = H(q, p)$ .

De Hamiltonfunctie met  $H(0, 0) = 0$  is evident

$$H(q, p) = -\frac{q^2 + p^2}{2} + q^2 p - \frac{p^3}{3}. \quad (13)$$

Omdat  $H$  de constante van beweging is, bestaan de niveau krommen van  $H$  uit de banen van (12).

- (c) [10 pt] Laat zien dat de drie lijnen  $l_0 := \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : p = 1/2\}$  en  $l_{1,2} := \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : p = -1 \pm \sqrt{3} q\}$  invariant zijn voor (12), d.w.z. bestaan uit de banen van (12).

**Methode I:** Langs  $l_0$  is de functie (13) constant. Inderdaad,

$$H\left(q, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = -\frac{1}{8} - \frac{1}{24} = -\frac{1}{6}$$

Langs  $l_{1,2}$  geldt

$$q = \pm \frac{p+1}{\sqrt{3}}$$

en dus

$$\begin{aligned} H\left(\pm \frac{p+1}{\sqrt{3}}, p\right) &= -\frac{(p+1)^2}{6} - \frac{p^2}{2} + \frac{(p+1)^2 p}{3} - \frac{p^3}{3} = \frac{-(p+1)^2 - 3p^2 + 2(p+1)^2 p - 2p^3}{6} \\ &= \frac{-p^2 - 2p - 1 - 3p^2 + 2p^3 + 4p^2 + 2p - 2p^3}{6} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

ook constant. Merk op dat de rustpunten  $E_{1,2,3}$  in dezelfde niveau-verzameling

$$H(q, p) = -\frac{1}{6}$$

zitten.

**Methode II:** Zij  $G(q, p) := p - \frac{1}{2}$ . Dan is  $(q, p) \in l_0$  equivalent met  $G(q, p) = 0$ . Langs iedere oplossing van (12) geldt

$$\frac{d}{dt}G(q(t), p(t)) = \dot{p}(t) = q(t) - 2q(t)p(t) = -2q(t)\left(p(t) - \frac{1}{2}\right) = -2q(t)G(q(t), p(t)).$$

De functie  $g(t) = G(q(t), p(t))$  voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$\dot{g} = -2q(t)g.$$

Als  $g(0) = 0$ , d.w.z.  $(q(0), p(0)) \in l_0$ , dan is  $g(t) = 0$ , ofwel  $(q(t), p(t)) \in l_0$ , voor alle  $t$  waarvoor de oplossing van (12) bestaat. De lijn  $l_0$  is dus invariant.

Zij  $F_{\pm}(q, p) := p \mp \sqrt{3}q + 1$ . Dan is  $(q, p) \in l_{1,2}$  equivalent met  $F_{\pm}(q, p) = 0$ . Langs iedere oplossing van (12) geldt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F_{\pm}(q(t), p(t)) &= \dot{p}(t) \mp \sqrt{3}\dot{q}(t) = q(t) - 2q(t)p(t) \mp \sqrt{3}(-p(t) + q^2(t) - p^2(t)) \\ &= (q \pm \sqrt{3}p)(p \mp \sqrt{3}q + 1) = (q \pm \sqrt{3}p)F_{\pm}(q(t), p(t)). \end{aligned}$$

De functies  $f_{\pm}(t) = F_{\pm}(q(t), p(t))$  voldoen aan de differentiaalvergelijkingen

$$\dot{f}_{\pm} = (q \pm \sqrt{3}p)f_{\pm}.$$

Als  $f_{\pm}(0) = 0$ , d.w.z.  $(q(0), p(0)) \in l_{1,2}$ , dan is  $f(t) = F_{\pm}(q(t), p(t))g(t) = 0$ , ofwel  $(q(t), p(t)) \in l_{1,2}$ , voor alle  $t$  waarvoor de oplossing bestaat. De lijnen  $l_{1,2}$  zijn invariant.

**Methode III:** Het vectorveld van (12)

$$f(q, p) = \begin{pmatrix} -p + q^2 - p^2 \\ q - 2qp \end{pmatrix}$$

is niet gelijk aan nul en raakt de lijnen  $l_{0,1,2}$  in alle punten behalve  $E_1 = l_1 \cap l_2$ ,  $E_2 = l_1 \cap l_0$  en  $E_3 = l_2 \cap l_0$  (de rustpunten). Inderdaad, de vector

$$n_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

is orthogonaal met  $l_0$  en

$$\langle n_0, f(q, p) \rangle|_{l_0} = (q - 2qp)|_{p=\frac{1}{2}} = q - q \equiv 0.$$

De vectoren

$$n_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad n_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

zijn orthogonaal met  $l_1$  en  $l_2$ , respectievelijk. Verder geldt

$$\begin{aligned} \langle n_1, f(q, p) \rangle|_{l_1} &= \left( -\sqrt{3}(-p + q^2 - p^2) + q - 2qp \right) \Big|_{p=-1+\sqrt{3}q} \\ &= -\sqrt{3} \left( 1 - \sqrt{3}q + q^2 - (-1 + \sqrt{3}q)^2 \right) + q - 2q(-1 + \sqrt{3}q) \\ &= -\sqrt{3} + 3q - \sqrt{3}q^2 + \sqrt{3} - 6q + 3\sqrt{3}q^2 + q + 2q - 2\sqrt{3}q^2 \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \langle n_2, f(q, p) \rangle|_{l_2} &= \left( \sqrt{3}(-p + q^2 - p^2) + q - 2qp \right) \Big|_{p=-1-\sqrt{3}q} \\ &= \sqrt{3} \left( 1 + \sqrt{3}q + q^2 - (1 + \sqrt{3}q)^2 \right) + q - 2q(-1 - \sqrt{3}q) \\ &= \sqrt{3} + 3q + \sqrt{3}q^2 - \sqrt{3} - 6q - 3\sqrt{3}q^2 + q + 2q + 2\sqrt{3}q^2 \\ &\equiv 0. \end{aligned}$$

- (d) [10 pt] Bepaal de types van alle rustpunten van (12), in het bijzonder hun stabiliteit.

**Methode I:** De matrix van linearisatie van (12) in het rustpunt  $E_0$  is

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De eigenwaarden van  $A_0$  zijn  $\lambda_{1,2} = \pm i$ . Dus heeft de linearisatie een centrum in  $E_0$ . Omdat (12) een Hamilton-stelsel is, is dit rustpunt ook een centrum voor (12), d.w.z. alle banen van (12) in een omgeving van  $E_0$  zijn gesloten.  $E_0$  is dus Lyapunov-stabiel.

De linearisatie matrices van (12) in de rustpunten  $E_1, E_2$  en  $E_3$  zijn

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -2 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix},$$

respectievelijk. De eigenwaarden van iedere  $A_{1,2,3}$  zijn  $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3}$ . De linearisaties dus hebben de hyperbolische zaddelpunten in  $E_{1,2,3}$ . Wegens de Stelling van Grobman-Hartman, ieder punt is ook een zadelpunt voor (12). Deze rustpunten zijn instabiel.

**Methode II:** De Hamiltonfunctie (13) heeft een lokaal maximum in  $E_0$ . Inderdaad, in een omgeving van  $E_0 = (0, 0)$

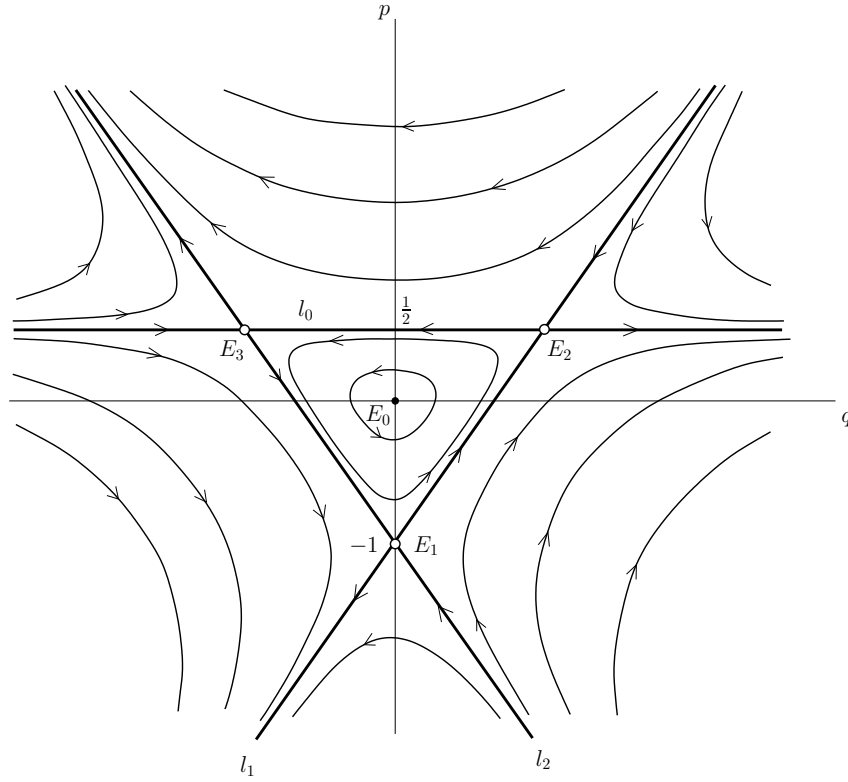
$$H(q, p) = -\frac{1}{2}(q^2 + p^2) + O(\|(q, p)\|^3).$$

Het kwadratische deel heeft een lokaal maximum in  $E_0$  en de functie  $H$  dus ook. Alle niveau-krommen van  $H$  in een omgeving van  $E_0$  zijn gesloten: het is een Lyapunov-stabiel centrum.

Bij ieder van de rustpunten  $E_1, E_2$  en  $E_3$ , zijn er twee niveau-lijnen  $l_k$  van  $H$  die door het rustpunt gaan. Ieder punt is dus een instabiel zadelpunt.

- (e) [10 pt] Schets het faseplaatje behorend bij (12) in het  $(q, p)$ -vlak. Let op de rustpunten en andere speciale banen. Zet ook pijltjes!

Zie Figuur 1.



Figuur 1: Faseplaatje van (12) in het  $(q, p)$ -vlak.