

## Tentamen Differentiaalvergelijkingen (WISB231), 12 april 2018, 13:30-16:30

Dit tentamen bestaat uit drie opgaven. Maak iedere opgave op een apart vel. Het is bij dit tentamen niet toegestaan om een boek, aantekeningen, mobiele telefoon, laptop of een grafische rekenmachine te gebruiken. Vergeet niet op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer te schrijven. Motiveer uw antwoorden. Succes!

### Opgave 1 [30 pt]

- (a) [20 pt] Onderzoek of het stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} y_1'' = y_2, \\ y_2'' = y_1, \end{cases} \quad (1)$$

een niet-triviale oplossing heeft waarvoor  $y_1(0) = y_2(0) = y_1(\pi) = y_2(\pi) = 0$ .

- (b) [10 pt] Hoeveel oplossingen heeft (1) met  $y_1(0) = y_2(0) = y_1(\pi) = 0$  maar  $y_2(\pi) = 1$ ?

**Opgave 2** [30 pt] Zij  $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$  met  $\omega > 0$  en zij  $A$  een  $2 \times 2$  reële matrix met complexe eigenwaarden  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$ . Bewijs dat

$$e^{tA} = e^{\alpha t} \left[ \cos(\omega t)E + \frac{\sin(\omega t)}{\omega} B \right], \quad (2)$$

waarin  $B = A - \alpha E$  en  $E$  de  $2 \times 2$  eenheidsmatrix is. *Hint:* Laat eerst zien dat (2) klopt voor

$$A_0 = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix}$$

en gebruik daarna dat  $A = P^{-1}A_0P$  voor een inverteerbare reële  $2 \times 2$  matrix  $P$ .

**Opgave 3** [40 pt] Beschouw het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \dot{q} = -p + q^2 - p^2, \\ \dot{p} = q - 2qp. \end{cases} \quad (3)$$

- (a) [5 pt] Bepaal alle rustpunten van (3) in het  $(q, p)$ -vlak.  
(b) [5 pt] Bewijs dat (3) herschreven kan worden als een Hamilton-stelsel

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p}, \\ \dot{p} = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q}, \end{cases}$$

en vind de Hamiltonfunctie  $H = H(q, p)$ .

- (c) [10 pt] Laat zien dat de drie lijnen  $l_0 := \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : p = 1/2\}$  en  $l_{1,2} := \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : p = -1 \pm \sqrt{3} q\}$  invariant zijn voor (3), d.w.z. bestaan uit de banen van (3).  
(d) [10 pt] Bepaal de types van alle rustpunten van (3), in het bijzonder hun stabiliteit.  
(e) [10 pt] Schets het faseplaatje behorend bij (3) in het  $(q, p)$ -vlak. Let op de rustpunten en andere speciale banen. Zet ook pijltjes!