Tentamen Wat is Wiskunde (WISB101)
Donderdag 9 november 2017, 9:00 - 12:00

Docenten: *Barbara van den Berg & Gil Cavalcanti & Karma Dajani & Carel Faber & Harry Smit & Guido Terra-Bleeker*

- GEBRUIK EEN APART VEL VOOR IEDERE OPGAVE. Het tentamen bestaat uit zes opgaven die elk even zwaar meetellen.
- Dit tentamen bevat een NEDERLANDSE en een ENGELSE VERSIE. De Engelse versie staat na de Nederlandse versie.
- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.
- Het gebruik van telefoons, computers, rekenmachines, boeken of aantekeningen is niet toegestaan.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en bewijs al je beweringen.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt bewijzen, mag je dat resultaat in het vervolg wel gebruiken.

Opgave 1 (nieuw vel papier)

(a). (*8 punten*) Laat P en Q twee beweringen zijn. Bewijs met behulp van een waarheidstabel dat de volgende bewering een tautologie is:

$$((P \Rightarrow Q) \wedge \sim Q) \Rightarrow \sim P.$$

(b). (*2 punten*) Laat $f\colon X \to Y$ een functie zijn. Geef de definities van injectiviteit en surjectiviteit met behulp van kwantoren en logische symbolen.

Opgave 2 (nieuw vel papier)

(a). (*4 punten*) Laat X en Y twee verzamelingen zijn. Bewijs dat $X \cap Y = X \cup Y$ dan en slechts dan als $X = Y$.

We definiëren een relatie R op $\mathbb{R}$ door: xRy dan en slechts dan als $\lceil x \rceil = \lceil y \rceil$.

(b). (*4 punten*) Bewijs dat R een equivalentierelatie is.

(c). (*2 punten*) Beschrijf de partitie van $\mathbb{R}$ bepaald door R (in termen van intervallen van $\mathbb{R}$). Bewijs je bewering.

Z.O.Z.

Opgave 3 (nieuw vel papier)

In deze opgave bepalen we de waarde van

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}.$$

(a). (*4 punten*) Voor $n \in \mathbb{N}$ definiëren we $t_n = \frac{n}{2^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$. Bewijs met volledige inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $t_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

(b). (*4 punten*) Bepaal $\lim_{n\to\infty} t_n$ en geef hiervoor een ϵ-N-bewijs.

(c). (*2 punten*) Bepaal $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$. Je mag hierbij gebruik maken van het feit dat $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$ en dat

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}.$$

Opgave 4 (nieuw vel papier)

Laat X en Y twee niet-lege verzamelingen zijn. Bewijs de volgende drie beweringen:

(a). (*4 punten*) Laat $g : Y \to X$ een functie zijn. Als er een functie $f : X \to Y$ bestaat zodat voor alle $x \in X$ geldt dat $(g \circ f)(x) = x$, dan is g surjectief.

(b). (*4 punten*) Laat $f : X \to Y$ een functie zijn. Als er een functie $g : Y \to X$ bestaat zodat voor alle $x \in X$ geldt dat $(g \circ f)(x) = x$, dan is f injectief.

(c). (*2 punten*) Laat $f : X \to Y$ een functie zijn. Als f injectief is, dan bestaat er een functie $g : Y \to X$ met de eigenschap dat $(g \circ f)(x) = x$ voor alle $x \in X$.

Opgave 5 (nieuw vel papier)

(a). (*3 punten*) Beschouw de functie $f : \{0, 1, 2, 3, 4\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeven door $f((i, n)) = i + 5n$. Wat is $f((0, 1))$? En wat is $f((1, 2))$? Laat zien dat f injectief is.

(b). (*2 punten*) Bewijs dat $\{0, 1, 2, 3, 4\} \times \mathbb{N}$ aftelbaar oneindig is.

(c). (*3 punten*) Bewijs dat $|\{-1, 1\} \times \mathbb{R}| \leq |\mathbb{R}|$. Je mag hierbij gebruik maken van het feit dat de functie $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ gedefinieerd door $f(x) = e^x$ injectief is.

(d). (*2 punten*) Bewijs dat $|\{-1, 1\} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$.

Z.O.Z.

Opgave 6 (nieuw vel papier)

Voor een natuurlijk getal $n \geq 2$ en een geheel getal a schrijven we de congruentieklasse van a modulo n als $[a]_n$. Dit is een element van $\mathbb{Z}_n$.

(a). (*4 punten*) Laat m en n natuurlijke getallen ≥ 2 zijn. Bewijs: als $m|n$, dan bestaat er een welgedefinieerde functie $f\colon \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$ gegeven door $f([a]_n) = [a]_m$.

(b). (*3 punten*) Bewijs ook de omkering: als er een welgedefinieerde functie $f\colon \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$ bestaat die gegeven wordt door $f([a]_n) = [a]_m$, dan geldt $m|n$.

(c). (*3 punten*) Neem nu aan dat $m|n$ en laat $f\colon \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$ de functie zijn gegeven door $f([a]_n) = [a]_m$. Bewijs dat voor alle $a, b \in \mathbb{Z}$ geldt dat

$$f([a]_n + [b]_n) = f([a]_n) + f([b]_n) \qquad \text{en} \qquad f([a]_n \cdot [b]_n) = f([a]_n) \cdot f([b]_n).$$

Merk op: links van het gelijkteken wordt de optelling/vermenigvuldiging in $\mathbb{Z}_n$ gebruikt, rechts die in $\mathbb{Z}_m$.

EINDE TENTAMEN - ENGELSE VERTALING HIERONDER

Exercise 1 (new sheet of paper)

(a). (*8 points*) Let P and Q be statements. Show, by using a truth table, that

$$((P \Rightarrow Q) \wedge \sim Q) \Rightarrow \sim P$$

is a tautology.

(b). (*2 points*) Let $f\colon X \to Y$ be a function. State the definitions of injective (one-to-one) and surjective (onto) using quantifiers and logical connectives.

Exercise 2 (new sheet of paper)

(a). (*4 points*) Let X and Y be sets. Prove that $X \cap Y = X \cup Y$ if and only if $X = Y$.

A relation R is defined on $\mathbb{R}$ by: xRy if and only if $\lceil x \rceil = \lceil y \rceil$.

(b). (*4 points*) Prove that R is an equivalence relation.

(c). (*2 points*) Determine the partition of $\mathbb{R}$ defined by R (in terms of intervals in $\mathbb{R}$). Prove your statement.

P.T.O.

Exercise 3 (new sheet of paper)

In this exercise we will compute the value of

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}.$$

(a). (*4 points*) For all $n \in \mathbb{N}$ we define $t_n = \frac{n}{2^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$. Use mathematical induction to prove that for all $n \in \mathbb{N}$ we have $t_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

(b). (*4 points*) Determine $\lim_{n\to\infty} t_n$ and prove that this limit is correct with an ϵ-N-proof.

(c). (*2 points*) Determine $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$. You may use the fact that $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$ and that

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}.$$

Exercise 4 (new sheet of paper)

Let X and Y be nonempty sets. Show that the following hold:

(a). (*4 points*) Let $g : Y \to X$ be a function. If there is a function $f : X \to Y$ such that for all $x \in X$ we have $(g \circ f)(x) = x$, then g is surjective (onto).

(b). (*4 points*) Let $f : X \to Y$ be a function. If there is a function $g : Y \to X$ such that for all $x \in X$ we have $(g \circ f)(x) = x$, then f is injective (one-to-one).

(c). (*2 points*) Let $f : X \to Y$ be a function. If f is injective (one-to-one), there is a function $g : Y \to X$ such that $(g \circ f)(x) = x$ for all $x \in X$.

Exercise 5 (new sheet of paper)

(a). (*3 points*) Consider the function $f : \{0, 1, 2, 3, 4\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ given by $f((i, n)) = i + 5n$. What is $f((0, 1))$? And $f((1, 2))$? Show that f is injective (one-to-one).

(b). (*2 points*) Prove that $\{0, 1, 2, 3, 4\} \times \mathbb{N}$ is countably infinite (denumerable).

(c). (*3 points*) Prove that $|\{-1, 1\} \times \mathbb{R}| \leq |\mathbb{R}|$. You may use the fact that the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ defined by $f(x) = e^x$ is injective (one-to-one).

(d). (*2 points*) Prove that $|\{-1, 1\} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$.

P.T.O.

Exercise 6 (new sheet of paper)

For every natural number $n \geq 2$ and every integer a we denote the congruence class of a modulo n by $[a]_n$. This is an element of $\mathbb{Z}_n$.

(a). (*4 points*) Let m and n be natural numbers ≥ 2. Prove: if $m|n$, then there exists a well-defined function $f\colon \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$ defined by $f([a]_n) = [a]_m$.

(b). (*3 points*) Prove the converse: if there exists a well-defined function $f\colon \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$ defined by $f([a]_n) = [a]_m$, then $m|n$.

(c). (*3 points*) We assume that $m|n$ and let $f\colon \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$ be the function defined by $f([a]_n) = [a]_m$. Prove that for all $a,\, b \in \mathbb{Z}$:

$$f([a]_n + [b]_n) = f([a]_n) + f([b]_n) \qquad \text{and} \qquad f([a]_n \cdot [b]_n) = f([a]_n) \cdot f([b]_n).$$

Remark: on the left hand side of the equality we use the addition/multiplication of $\mathbb{Z}_n$, on the right hand side the addition/multiplication of $\mathbb{Z}_m$.