Universiteit Utrecht
Betafaculteit
Examen Discrete Wiskunde op donderdag 21 april, 15.15- 18.15 uur.

- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Schrijf op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer.
- Wanneer u een bekende stelling wilt gebruiken, dan moet u die netjes formuleren; u hoeft hem niet te bewijzen.
- Het examen omvat 8 opgaven met in totaal 13 (deel)opgaven.
- De maximale score per deelopgave is als volgt (totaal 45 punten):
  - 2 punten op vragen 1b, 1c;
  - 3 punten op vragen 1a, 1d, 8a;
  - 4 punten op vragen 1e, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8b.
- Een rekenmachine is niet nodig en derhalve verboden. Eventuele rekenfouten worden niet bestraft, tenzij het de spuigaten uitloopt (dit ter beoordeling van de nakijker).

Succes!

==

Opgave 1.
Beschouw een ketting waar 6 kralen aan passen; we hebben kralen met de kleuren rood, wit, geel en blauw. Hierop kunnen de volgende permutaties worden uitgevoerd: 0,1,2,3,4,5 posities verschuiven en de ketting omkeren, waarbij de spiegelas loopt tussen de kralen door.

(a) Geef **expliciet** de verschillende permutaties (denk eraan dat je ze bij (c) nodig hebt).

(b) Ga na of de permutaties een groep vormen (associatief hoeft u niet te checken). Het gaat hierbij vooral dat u kunt aangeven welke permutatie u in een specifieke situatie moet nemen.

(c) Gegeven de gewichten $w(\text{rood}) = r$, $w(\text{wit}) = w$, $w(\text{geel}) = g$ en $w(\text{blauw}) = b$, bepaal de pattern inventory (notatie $\text{Inve}(r, w, g, b)$). U mag hierbij uiteraard machten van $(r + w + g + b)$, enz. laten staan.

(d) Bepaal het aantal equivalentieklassen dat geen rode kralen bevat, precies één witte, en meer gele dan blauwe kralen, waarbij u zoveel mogelijk geschikte getallen invult. Enumeratie levert niets op.

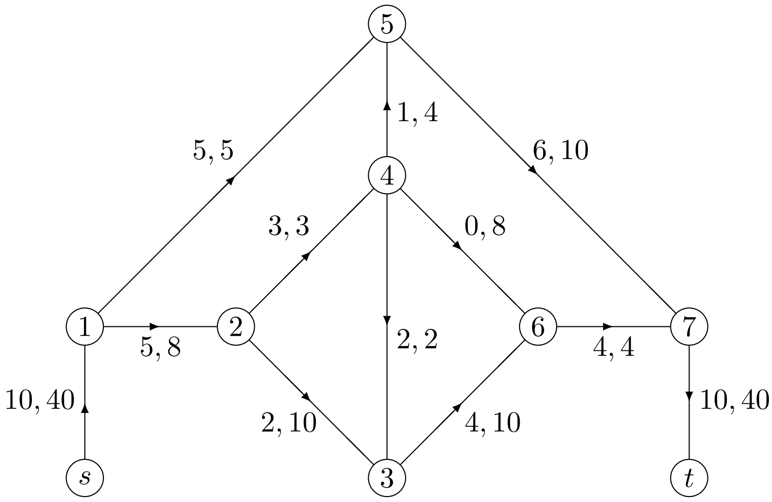
(e) Bepaal het aantal equivalentieklassen dat zowel een oneven aantal rode kralen als een oneven aantal blauwe kralen bevat. U mag hierbij alleen **getallen** invullen; enumeratie levert niets op. Om het rekenwerk te beperken hoeft u alleen de formules te geven in termen van $Inve(r, w, g, b)$ waarbij u dan aangeeft welke getallen u invult. U kunt ook punten verdienen door aan te geven hoe u het aantal equivalentieklassen kunt bepalen dat een oneven aantal rode kralen bevat. **Motiveer uw antwoord.**

Opgave 2.
Gegeven is een gerichte graaf (V, A), waarbij iedere pijl $(v, w) \in A$ een positieve, geheeltallige lengte $c(v, w)$ heeft. V bevat de speciale punten s en t. We zoeken een kortste pad van s naar t.

Het klassieke algoritme om dit probleem op te lossen is natuurlijk het algoritme van Dijkstra, maar het kortste pad dat door dit algoritme wordt gevonden kan een oneven lengte hebben. Vanuit egalitarisch oogpunt willen we natuurlijk niet dat onze linkervoet meer werk doet dan onze rechter-, en daarom wordt als extra voorwaarde opgenomen dat we een kortste pad van s naar t zoeken met een **even** lengte (waarbij lengte slaat op de lengtefunctie $c(v, w)$, en niet op het aantal pijlen in het pad). Merk op dat het is toegestaan (en soms zelfs nodig) om dezelfde knoop meerdere keren te bezoeken.

Geef een algoritme dat het bovenstaande probleem oplost; geef kort aan waarom dit algoritme een optimale oplossing vindt. De looptijd is niet heel belangrijk, maar het moet wel polynomiaal zijn (een algoritme gebaseerd op enumeratie levert dus niets op).

Opgave 3.
Beschouw het hieronder gegeven netwerk. De getallen bij de pijlen geven respectievelijk de waarde van de huidige stroom door die pijl en de capaciteit van die pijl aan. Bepaal de maximale stroom door dit netwerk en bewijs de maximaliteit van deze stroom met behulp van een minimale snede. **Geef alle stappen van uw berekening duidelijk aan, inclusief residuele graaf. Het uitsluitend vermelden van de oplossing wordt niet goedgerekend**.



Opgave 4.
Bij het oplossen van het HANDELSREIZIGERSPROBLEEM op een graaf $G = (V, E)$ met behulp van *branch-and-bound* gebruikt men een zogenaamde *1-tree*. Een 1-tree bestaat uit een opspannende boom plus één extra kant, waarbij vooraf een verzameling kanten D is gegeven die allemaal zeker tot de 1-tree moeten behoren. Gegeven de graaf $G = (V, E)$ met gegeven lengte $l(e) > 0$ voor iedere kant $e \in E$ en gegeven de kantenverzameling $D \subset E$, geef aan hoe je een 1-tree van minimale lengte kunt bepalen die alle kanten in D bevat. U mag er hierbij van uit gaan dat D een acyclische deelgraaf van E is en dat er geen twee kanten zijn met gelijke lengte. **Bewijs de correctheid van uw algoritme; u mag hierbij uitgaan van de correctheid van de bij het college behandelde algoritmen om een minimale opspannende boom te bepalen**.

Opgave 5.
Gegeven is een gerichte graaf G met voor elke pijl (v, w) een capaciteit $c_{v,w}$. Wanneer we de maximale stroom van s naar t bepalen, dan blijkt dat de omvang van deze stroom helaas niet groot genoeg is. Gelukkig kan daar wat aan worden gedaan: we mogen k maal de capaciteit van een pijl met één verhogen (dit hoeft niet steeds een andere pijl te zijn; je mag ook de capaciteit van een pijl vaker dan één maal verhogen). We willen er daarbij voor zorgen dat de maximale flow zo veel mogelijk toeneemt, en dat deze maximale toename wordt gerealiseerd door zo min mogelijk keren de capaciteit te verhogen. Geef aan hoe u dit probleem kunt oplossen door middel van min cost max flow. Denk hierbij aan de geheeltalligheid. Geef ook kort aan waarom dit algoritme een optimale oplossing geeft; hierbij hoeft u niet aan te tonen dat het min cost max flow algoritme een optimale oplossing geeft.

Opgave 6.
Beschouw het volgende productie-voorraad probleem. Een bedrijf produceert verschillende soorten producten, maar we concentreren ons op één product. De hoeveelheid die je per periode kunt produceren hangt af van de status van de machines: wanneer je in de vorige periode hebt geproduceerd, dan kun je maximaal Q_1 eenheden produceren; wanneer je in de vorige periode niet hebt geproduceerd, dan kost het eerst tijd om de machines weer op te starten en kun je maximaal Q_2 eenheden produceren. Je mag ieder geheeltallig aantal eenheden produceren, zolang het maar niet de maximale productie te boven gaat. Naast variabele kosten (die we voor het gemak op 0 zetten) spelen er bij de productie ook nog vaste kosten een rol: wanneer je in een periode besluit om te produceren, dan kost dit M aan vaste kosten, ongeacht het aantal eenheden dat je produceert; wanneer je niets produceert, dan spaar je deze vaste kosten uit. In iedere periode t ($t = 1, \ldots, T$) moet je een gegeven hoeveelheid eenheden d_t leveren; je mag aannemen dat je daarvoor ook de productie van dag t mag gebruiken. Wat je overhoudt moet je opslaan; dit kost h per eenheid per dag, en je kunt maximaal V eenheden opslaan. Neem aan dat de beginvoorraad 0 bedraagt, en dat je aan het eind van periode T geen voorraad hoeft over te laten. Het doel is natuurlijk om in iedere periode aan de vraag te voldoen tegen minimale totale kosten.

Geef een algoritme dat het bovenstaande probleem optimaal oplost. Alle genoemde aantallen zijn geheeltallig. **Motiveer uw antwoord**.

Opgave 7.
Bij een (voetbal)wedstrijd heb je een arbiter nodig, en bij gebrek aan goede scheidsrechters wil je de aanwezige scheidsrechters natuurlijk zo veel mogelijk koesteren. Scheidsrechter X is zo'n vrijwilliger die iedere zaterdag (en of zondag) druk bezig is om een aantal wedstrijden in goede banen te leiden tegen een marginale vergoeding.

Gegeven is een verzameling van n wedstrijden in de regio, die X zou kunnen fluiten. Van iedere wedstrijd is bekend waar deze wordt gespeeld, wanneer hij begint en wanneer hij eindigt. Uiteraard wil X graag fluiten, maar sommige wedstrijden net iets grager dan andere wedstrijden; neem aan dat je voor iedere wedstrijd j ($j = 1, \ldots, n$) weet wat het gewicht w_j (> 0) is dat X aan deze wedstrijd toekent. Na afloop van de wedstrijd krijgt X altijd een kopje koffie aangeboden (duurt 15 minuten) en gaat dan een volgende wedstrijd fluiten op hetzelfde sportcomplex, of hij vertrekt om ergens anders een wedstrijd te gaan fluiten. Neem aan dat je de bijbehorende reistijd $c_{i,j}$ om van de plaats van wedstrijd i naar de plaats van wedstrijd j te komen kent; hier zit ook de tijd in die X nodig heeft om zich voor te bereiden op wedstrijd j. Hoewel X graag weer even ergens gaat kijken, vindt hij het toch vervelend om naar een andere plaats te gaan, wat resulteert in een score y_{ij} (< 0) voor de verplaatsing. Het doel van X is om het totaal gewicht van de wedstrijden waar hij aan wordt toegewezen (de w_j component) plus de verplaatsingswaardering (de y_{ij} component) te maximaliseren. Geef aan hoe je dit probleem kunt herformuleren als een bekend probleem waarvoor een algoritme bekend is dat het optimaal oplost. Enumeratie levert niets op. **Motiveer uw antwoord**.

Opgave 8.
Gegeven is een graaf $G = (V, E)$; iedere kant $e \in E$ heeft een niet-negatieve geheeltallige lengte $c(e)$. We zoeken hierop een opspannende boom van minimale lengte, waarbij de graad van ieder punt maximaal gelijk is aan k, met $k = 3$. Noem dit het MST-3 probleem. De graad van een punt is gelijk aan het aantal kanten dat aan dat punt vastzit.

(a) Definieer de beslissingsvariant van MST-3, en geef aan welke voorwaarden u moet verifiëren om aan te tonen dat deze tot de klasse $\mathcal{NP}$ behoort; u hoeft deze verificatie niet uit te voeren.

(b) Laat zien dat de beslissingsvariant van MST-3 $\mathcal{NP}$-compleet is. Hierbij mag u gebruiken dat de problemen Partitie, Hamilton-cykel en alle genoemde varianten van het Hamilton-pad probleem $\mathcal{NP}$-compleet zijn (zie definities verderop).

Indien het niet lukt met grens $k = 3$, dan kunt u ook nog punten verdienen door het gevraagde te bewijzen voor een andere waarde van k.

$\mathcal{NP}$-complete problemen

Partitie: Gegeven t gehele getallen $a_1, \ldots, a_t$, bestaat er een deelverzameling S van de indexverzameling $\{1, \ldots, t\}$ zodang dat

$$\sum_{j \in S} a_j = \sum_{j=1}^{t} a_j/2?$$

Hamilton-cykel: Gegeven een graaf $G' = (V', E')$, bevat deze graaf een tour die ieder punt $v \in V'$ precies éénmaal bezoekt?

Hamilton-pad: Gegeven een graaf $G' = (V', E')$, bevat deze graaf een pad dat ieder punt $v \in V'$ precies éénmaal bezoekt? Hierbij geldt dat het probleem $\mathcal{NP}$-compleet blijft indien één of twee eindpunten van het pad vooraf zijn gespecificeerd.