Universiteit Utrecht
Betafaculteit

Examen Discrete Wiskunde I-II op donderdag 7 juli 2016, 13.30-16.30 uur.

- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Schrijf op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer.
- Het examen omvat 10 opgaven met in totaal 16 (deel)opgaven.
- Op de vragen 7b, 7d en 9a kunnen maximaal 2 punten worden gescoord; op de vragen 4a, 7a, 7c en 8b kunnen maximaal 3 punten worden gescoord; op alle overige vragen kunnen maximaal 4 punten worden gescoord. Totaal 54 punten.
- Bij de opgaven hieronder mag u er van uitgaan dat u een een algoritme voor Max Flow, Min cost max flow, Kortste pad, Minimale Opspannende boom beschikbaar hebt. Wanneer u dit wilt toepassen hoeft u alleen aan te geven op welke instantie dit moet gebeuren.
- Wanneer gevraagd wordt om een probleem op een bepaalde manier op te lossen, dan wordt iedere andere manier volledig fout gerekend. Enumeratie levert eveneens niets op.
- Een rekenmachine is niet nodig en derhalve verboden. Eventuele rekenfouten worden niet bestraft, tenzij het de spuigaten uitloopt (dit ter beoordeling van de nakijker).

Succes!

==

Opgave 1.
Er worden 60 willekeurige, verschillende, gehele getallen getrokken die allemaal ≥ 1 en ≤ 100 zijn. We willen weten of het mogelijk is om twee getallen uit die verzameling te vinden die optellen tot k. Bepaal de waarden van k waarvoor je kunt garanderen dat dit altijd mogelijk is, ongeacht welke 60 getallen je trekt. **Motiveer je antwoord**.

Opgave 2.
Gegeven is een rij van n stoelen, waarop we k **herkenbare** personen willen plaatsen. Iedere persoon wil dat in ieder geval de stoel links van hem vrij is, zodat hij daar zijn laptop enz. kan neerleggen; omdat ze elkaar niet geheel vertrouwen willen ze verder dat er nog minstens één stoel vrij is tussen de laptop en de volgende persoon. Geef aan op hoeveel manieren deze k personen kunnen worden geplaatst.

Opgave 3.
Geef een combinatorisch bewijs van de onderstaande gelijkheid.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+1}{k} = F(n);$$

hierbij is $F(n)$ het $n$de Fibonacci getal, waarbij geldt $F(0) = 1$ en $F(1) = 2$.

Opgave 4.
Los de onderstaande recurrente betrekkingen op met de JBF methode (karakteristieke vergelijking, particuliere oplossing, enz.). U mag eerder gevonden resultaten uiteraard hergebruiken. Bij (b) zijn de beginwaarden niet gegeven; hier hoeft u de constanten niet uit te rekenen (maar bij (a) wel).

(a) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ voor $n \geq 1$ met $a_0 = 1$ en $a_1 = 4$.

(b) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 2 \cdot 2^n + n$ voor $n \geq 2$ met a_0 en a_1.

Opgave 5.
Op een verjaardagstaart staan n kaarsjes die de jarige moet uitblazen. Bij iedere keer blazen gaat er minstens één kaarsje uit; verder geldt dat als er k kaarsjes op de taart staan, dan is de kans dat er precies j kaarsjes worden uitgeblazen gelijk aan $1/k$, voor $j = 1, \ldots, k$. Bepaal het verwachte aantal malen dat de jarige moet blazen om alle kaarsjes uit te blazen.

De verwachte waarde van een stochast X die met kans $P(X = x)$ een waarde x kan aannemen is gelijk aan $\sum_{x \in S} x \cdot P(X = x)$, waarbij S de verzameling van waarden is die X kan aannemen; voor een gewone dobbelsteen vind je dan dat de verwachte waarde gelijk is aan $1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5$.
Hint. Stel een recurrente betrekking op.

Opgave 6
Bij een wedstrijd paintball is het de bedoeling dat groep A (bestaande uit n kinderen) probeert ervoor te zorgen dat niemand van groep B (bestaande uit $k \leq n$ kinderen) de overkant haalt zonder geraakt te zijn. De leden van groep B hebben zich allen in dezelfde camouflagekleding gestoken en staan klaar om tegelijkertijd zo snel mogelijk naar de overkant te rennen. De leden van groep A zijn uitgerust met een paintball pistool; bij de overtocht hebben zij slechts de tijd om één persoon uit te kiezen (en uit te schakelen). Bereken de kans dat groep A wint, indien er geen tijd is om af te spreken wie wie onder vuur neemt. Ga er hierbij vanuit dat ieder schot raak is.

Opgave 7.
Gegeven is een ketting met $k = 6$ kralen; deze kralen kunnen drie kleuren krijgen: rood, blauw en wit. Op deze ketting kun je twee soorten permutaties uitvoeren: wel/niet omdraaien en met $0, 1, 2, 3, 4, 5$ plaatsen verschuiven.

(a) Geef de verschillende permutaties (denk eraan dat je ze bij (b) ook nog nodig hebt).

(b) Gegeven de gewichten $w(rood) = r$, $w(blauw) = b$ en $w(wit) = w$, bepaal de pattern inventory (je mag uiteraard machten van $(b + r + w)$ laten staan).

(c) Bepaal het aantal equivalentieklassen met precies één witte kraal die meer blauwe dan rode kralen bevatten. Je mag hierbij maximaal 1 symbool gebruiken.

(d) Bepaal het aantal equivalentieklassen met een even aantal blauwe kralen.

Opgave 8.
Gegeven zijn n munten, die allemaal een verschillende, geheeltallige waarde w_j ($j = 1, \ldots, n$) hebben.

(a) Geef een algoritme dat op efficiënte wijze (dus beter dan volledige enumeratie) nagaat of het mogelijk is om een gegeven bedrag Q precies te betalen.

(b) Geef een algoritme dat op efficiënte wijze (dus beter dan volledige enumeratie) nagaat op hoeveel verschillende manieren je het bedrag Q precies kunt betalen.

Opgave 9.
Er is werk aan de winkel. Gegeven is een aantal van n klanten dat geholpen moet worden door één medewerker. Iedere klant j ($j = 1, \ldots, n$) heeft een interval $[b_j, e_j]$ gespecificieerd gedurende welke hij/zij beschikbaar is; verder is de tijdsduur p_j van iedere klus j ($j = 1, \ldots, n$) gegeven. Het is de bedoeling dat zo veel mogelijk klanten worden geholpen. Een klus moet zonder onderbreking worden uitgevoerd; klus j ($j = 1, \ldots, n$) mag niet starten voor tijdstip b_j en moet uiterlijk klaar zijn op tijdstip e_j. De medewerker is gedurende de hele periode volledig beschikbaar. Noem dit probleem ZGMH (Zo Goed Mogelijke Hulp).

(a) Formuleer de beslissingsvariant van het probleem ZGMH.

(b) Toon aan dat het de beslissingsvariant van het probleem ZGMH $\mathcal{NP}$-volledig. U moet hierbij gebruiken dat het probleem PARTITIE $\mathcal{NP}$-volledig is. Formuleer de reductie en bewijs de correctheid ervan; u hoeft niet te bewijzen dat de reductie polynomiaal is. Het probleem PARTITIE is als volgt gedefinieerd: gegeven t niet-negatieve gehele getallen $a_1, \ldots, a_t$, bestaat er een deelverzameling S van de indexverzameling $\{1, \ldots, t\}$ waarvoor geldt

$$\sum_{j \in S} a_j = (\sum_{j=1}^{t} a_j)/2?$$

Opgave 10.
Beschouw de volgende variant van het probleem ZGMH: voor iedere klus geldt dat $e_j = b_j + p_j$ (wanneer je klus j ($j = 1, \ldots, n$) wilt uitvoeren, dan moet je beginnen op tijdstip b_j en het werk is pas klaar op tijdstip e_j). Wanneer je klus j uitvoert, dan levert dit een opbrengst o_j op.

Formuleer een algoritme dat in **polynomiale** tijd een toegelaten oplossing vindt met maximale opbrengst.

Formules enz.

Inclusion-Exclusion

Stel dat er in totaal N objecten zijn. Ieder object kan r verschillende eigenschappen, $a_1, \ldots, a_r$, bezitten. Het aantal objecten dat eigenschappen $a_{i_1}, \ldots, a_{i_t}$ bezit (en mogelijk nog andere eigenschappen) wordt genoteerd met $N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$; met $s_t = \sum N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$ wordt aangegeven dat er wordt gesommeerd over iedere combinatie van t ($t = 0, \ldots, r$) verschillende eigenschappen. Verder geeft $N(a'_1, \ldots, a'_r)$ het aantal van de N objecten aan die geen enkele van de r eigenschappen bezitten. Nu geldt

$$N(a'_1, \ldots, a'_r) = N - s_1 + s_2 + \ldots + (-1)^k s_k$$

Binomium

Het uitgebreide binomium van Newton is gedefinieerd als

$$(1+x)^u = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{u}{r} x^r,$$

waarbij

$$\binom{u}{r} = \begin{cases} \frac{u(u-1)\ldots(u-r+1)}{r!} & \text{als } r > 0 \\ 1 & \text{als } r = 0 \end{cases}$$

Toepassing van de regel levert bijv.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{r=0}^{\infty} (r+1) x^r.$$

Getal van Stirling

Het aantal mogelijkheden om n genummerde ballen te verdelen over k onherkenbare dozen waarbij geen enkele doos leeg blijft is het Stirling getal $S(n,k)$. Dit is gedefinieerd als

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$