Universiteit Utrecht
Betafaculteit

Examen Discrete Wiskunde II op donderdag 7 juli 2016, 13.30-16.30 uur.

- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Schrijf op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer.
- Een rekenmachine is niet nodig en derhalve verboden. Eventuele rekenfouten worden niet bestraft, tenzij het de spuigaten uitloopt (dit ter beoordeling van de nakijker).
- Het examen omvat 7 opgaven met in totaal 14 (deel)opgaven.
- Bij de opgaven hieronder **behalve Opgave 2** mag u er van uitgaan dat u een een algoritme voor Max Flow, Min cost max flow, Kortste pad, Minimale Opspannende boom beschikbaar hebt. Wanneer u dit wilt toepassen hoeft u alleen aan te geven op welke instantie dit moet gebeuren.
- De maximale score per onderdeel bedraagt:
  - 2 punten voor ieder van de vragen 1b, 1d, 1e, 1f, 4a
  - 3 punten voor onderdelen 1a, 1c, 3b;
  - 4 punten voor ieder van de vragen 2, 3a, 4b, 5, 7;
  - 5 punten voor onderdeel 6.

  Totaal 44 punten.

Succes!

==

Opgave 1.
Gegeven is een ketting met $k = 6$ kralen; deze kralen kunnen drie kleuren krijgen: rood, blauw en wit. Op deze ketting kun je twee soorten permutaties uitvoeren: wel/niet omdraaien en met $0, 1, 2, 3, 4, 5$ plaatsen verschuiven.

(a) Geef de verschillende permutaties (denk eraan dat je ze bij (b) ook nog nodig hebt).

(b) Gegeven de gewichten $w(rood) = r$, $w(blauw) = b$ en $w(wit) = w$, bepaal de pattern inventory (je mag uiteraard machten van $(b + r + w)$ laten staan).

(c) Bepaal het aantal equivalentieklassen met precies één witte kraal die meer blauwe dan rode kralen bevatten. Je mag hierbij maximaal 1 symbool gebruiken.

Gegeven de pattern inventory, definieer $Inve(w(rood), w(blauw), w(wit))$ als de waarde van de pattern inventory wanneer je getal $w(rood)$, enz. invoert (bijv. $Inve(2, 2, 2)$ geeft de waarde aan wanneer iedere kleur waarde 2 krijgt). Geef bij (d), (e), (f) aan hoe je deze aantallen kunt bereken door een formule te geven gebaseerd op $Inve(w(rood), w(blauw), w(wit))$; **hierbij mag je alleen getallen (dus geen symbolen als w, b, r) gebruiken**. Je hoeft de antwoorden niet uit te rekenen. Enumeratie levert niets op en kost alleen tijd. **Motiveer uw antwoord**.

(d) Bepaal het aantal equivalentieklassen zonder witte kralen.

(e) Bepaal het aantal equivalentieklassen met minstens één rode en minstens één witte kraal.

(f) Bepaal het aantal equivalentieklassen met een even aantal blauwe kralen.

Opgave 2.
Beschouw het hieronder gegeven netwerk. De getallen bij de pijlen geven respectievelijk de waarde van de huidige stroom door die pijl en de capaciteit van die pijl aan. Bepaal de maximale stroom door dit netwerk en bewijs de maximaliteit van deze stroom met behulp van een minimale snede. **Geef alle stappen van uw berekening duidelijk aan, inclusief residuele graaf. Het uitsluitend vermelden van de oplossing wordt niet goedgerekend**.

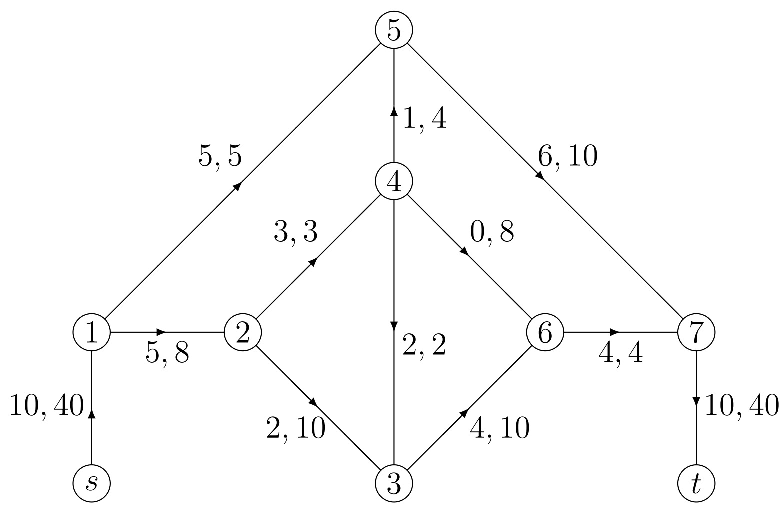

Figure 1: Netwerk.

Opgave 3.
Gegeven zijn n munten, die allemaal een verschillende, geheeltallige waarde w_j ($j = 1, \ldots, n$) hebben.

(a) Geef een algoritme dat op efficiënte wijze (dus beter dan volledige enumeratie) nagaat of het mogelijk is om een gegeven bedrag Q precies te betalen.

(b) Geef een algoritme dat op efficiënte wijze (dus beter dan volledige enumeratie) nagaat op hoeveel verschillende manieren je het bedrag Q precies kunt betalen.

Opgave 4.
Er is werk aan de winkel. Gegeven is een aantal van n klanten dat geholpen moet worden door één medewerker. Iedere klant j ($j = 1, \dots, n$) heeft een interval $[b_j, e_j]$ gespecificieerd gedurende welke hij/zij beschikbaar is; verder is de tijdsduur p_j van iedere klus j ($j = 1, \dots, n$) gegeven. Het is de bedoeling dat zo veel mogelijk klanten worden geholpen. Een klus moet zonder onderbreking worden uitgevoerd; klus j ($j = 1, \dots, n$) mag niet starten voor tijdstip b_j en moet uiterlijk klaar zijn op tijdstip e_j. De medewerker is gedurende de hele periode volledig beschikbaar. Noem dit probleem ZGMH (Zo Goed Mogelijke Hulp).

(a) Formueer de beslissingsvariant van het probleem ZGMH.

(b) Toon aan dat het de beslissingsvariant van het probleem ZGMH $\mathcal{NP}$-volledig. U moet hierbij gebruiken dat het probleem Partitie $\mathcal{NP}$-volledig is. Formuleer de reductie en bewijs de correctheid ervan; u hoeft niet te bewijzen dat de reductie polynomiaal is. Het probleem Partitie is als volgt gedefinieerd: gegeven t niet-negatieve gehele getallen $a_1, \dots, a_t$, bestaat er een deelverzameling S van de indexverzameling $\{1, \dots, t\}$ waarvoor geldt

$$\sum_{j \in S} a_j = (\sum_{j=1}^{t} a_j)/2?$$

Opgave 5.
Beschouw de volgende variant van het probleem ZGMH: voor iedere klus geldt dat $e_j = b_j + p_j$ (wanneer je klus j ($j = 1, \dots, n$) wilt uitvoeren, dan moet je beginnen op tijdstip b_j en het werk is pas klaar op tijdstip e_j). Wanneer je klus j uitvoert, dan levert dit een opbrengst o_j op.

Formuleer een algoritme dat in **polynomiale** tijd een toegelaten oplossing vindt met maximale opbrengst.

Opgave 6.
Beschouw het volgende probleem van een busmaatschappij. Gegeven is een aantal ritten die verzorgd moeten worden; van iedere rit is bekend wanneer en waar deze start en wanneer en waar deze eindigt. Om deze ritten te rijden zijn k identieke bussen beschikbaar (voor het rijden van een rit heb je aan één bus voldoende). Deze bussen komen aan het begin van de dag uit een remise en moeten daar 's avonds ook weer heen terug. Het is toegestaan om rit j na rit i te rijden indien de eindplaats van i en de beginplaats van j niet gelijk zijn; je moet dan een zogenaamde deadhead rijden. Voor iedere deadhead is bekend hoe lang het duurt en dus ook of dezelfde bus zowel rit i als rit j kan rijden. Verder zijn alle afstanden tussen alle belangrijke punten bekend. Het doel is om een toegelaten planning te vinden waarbij iedere rit wordt gereden en waarbij de totale afstand die de bussen rijden (inclusief rit vanaf/naar remise) minimaal is.

Geef aan hoe je het bovenstaande probleem kunt formuleren als een min cost max flow probleem.

Opgave 7.
Gegeven is een datacentrum dat door middel van een netwerk is verbonden met een aantal klanten. Dit netwerk kan worden gemodelleerd als een gerichte samenhangende graaf G met puntenverzameling V en pijlenverzameling A; het datacentrum bevindt zich in het punt v_0. De klanten willen verbinding houden met het datacentrum, ook als een aantal kanten in het netwerk uitvallen. In dit verband wordt de betrouwbaarheid van een verbinding tussen een klant en het datacentrum gedefinieerd als het minimale aantal kanten dat moet worden weggelaten om de verbinding te verbreken. Geef aan hoe u de betrouwbaarheid van een verbinding kunt bepalen voor een gegeven klant, die zich in punt v_1 bevindt.

Formules enz.

Inclusion-Exclusion
Stel dat er in totaal N objecten zijn. Ieder object kan r verschillende eigenschappen, $a_1, \ldots, a_r$, bezitten. Het aantal objecten dat eigenschappen $a_{i_1}, \ldots, a_{i_t}$ bezit (en mogelijk nog andere eigenschappen) wordt genoteerd met $N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$; met $s_t = \sum N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$ wordt aangegeven dat er wordt gesommeerd over iedere combinatie van t ($t = 0, \ldots, r$) verschillende eigenschappen. Verder geeft $N(a'_1, \ldots, a'_r)$ het aantal van de N objecten aan die geen enkele van de r eigenschappen bezitten. Nu geldt

$$N(a'_1, \ldots, a'_r) = N - s_1 + s_2 + \ldots + (-1)^k s_k$$

Binomium

Het uitgebreide binomium van Newton is gedefinieerd als

$$(1+x)^u = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{u}{r} x^r,$$

waarbij

$$\binom{u}{r} = \begin{cases} \frac{u(u-1)\ldots(u-r+1)}{r!} & \text{als } r > 0 \\ 1 & \text{als } r = 0 \end{cases}$$

Toepassing van de regel levert bijv.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{r=0}^{\infty} (r+1)x^r.$$