**Universiteit Utrecht**
**Betafaculteit**

**Examen Discrete Wiskunde I op donderdag 7 juli 2016, 13.30-16.30 uur.**

- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Schrijf op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer.
- Het examen omvat 10 opgaven met in totaal 13 (deel)opgaven.
- Op vraag 7a kunnen maximaal 3 punten worden gescoord; op alle overige vragen kunnen maximaal 4 punten worden gescoord. Totaal 51 punten.
- Wanneer gevraagd wordt om een probleem op een bepaalde manier op te lossen, dan wordt iedere andere manier volledig fout gerekend. Enumeratie levert eveneens niets op.
- Een rekenmachine is niet nodig en derhalve verboden. Eventuele rekenfouten worden niet bestraft, tenzij het de spuigaten uitloopt (dit ter beoordeling van de nakijker).

**Succes!**

================================================

**Opgave 1.**
Iemand gooit één keer met vijf dobbelstenen. Hoe groot is de kans op een full-house? Er is sprake van een full-house indien je driemaal een waarde $x$ gooit en tweemaal $y$, met $x \neq y$.

**Opgave 2.**
Gegeven zijn twee gesorteerde rijen $a_1, \ldots, a_k$ en $b_1, \ldots, b_n$. Deze willen we samenvoegen tot één rij, waarin de elementen $a_2, \ldots, a_k$ en $b_1, \ldots, b_n$ in de juiste volgorde blijven staan (waarbij de elementen uit de andere rij er tussen door komen); element $a_1$ mag overal komen te staan, zolang het maar niet links van $a_2$ staat. Hoeveel verschillende rijen kunnen op deze manier worden gevormd? Deze formule mag geen sommatie bevatten.

**Opgave 3**
We willen $k$ niet-negatieve, gehele getallen $x_1, \ldots, x_k$ trekken zodanig dat $x_1 + \ldots + x_k = n$.

(a) Bewijs met behulp van een **combinatorisch** bewijs dat het aantal mogelijkheden hiervoor gelijk is aan $\binom{n+k-1}{k-1}$.

(b) Bewijs (a) met behulp van een genererende functie.

(c) Bereken (dus geen volledige enumeratie) het aantal mogelijkheden om drie niet-negatieve, gehele getallen $x_1$, $x_2$ en $x_3$ te kiezen zodanig dat $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, waarbij geldt $x_1 \in \{4, 5, 6\} \cup \{10, 11, 12\}$, $x_2 \leq 8$ en $5 \leq x_3 \leq 10$.

**Opgave 4**
Er worden 60 willekeurige, verschillende, gehele getallen getrokken die allemaal $\geq 1$ en $\leq 100$ zijn. We willen weten of het mogelijk is om twee getallen uit die verzameling te vinden die optellen tot $k$. Bepaal de waarden van $k$ waarvoor je kunt garanderen dat dit altijd mogelijk is, ongeacht welke 60 getallen je trekt. **Motiveer je antwoord**.

**Opgave 5.**
Gegeven is een rij van $n$ stoelen, waarop we $k$ **herkenbare** personen willen plaatsen. Iedere persoon wil dat in ieder geval de stoel links van hem vrij is, zodat hij daar zijn laptop enz. kan neerleggen; omdat ze elkaar niet geheel vertrouwen willen ze verder dat er nog minstens één stoel vrij is tussen de laptop en de volgende persoon. Geef aan op hoeveel manieren deze $k$ personen kunnen worden geplaatst.

**Opgave 6.**
Geef een combinatorisch bewijs van de onderstaande gelijkheid.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+1}{k} = F(n);$$

hierbij is $F(n)$ het $n$de Fibonacci getal, waarbij geldt $F(0) = 1$ en $F(1) = 2$.

**Opgave 7.**
Los de onderstaande recurrente betrekkingen op met de JBF methode (karakteristieke vergelijking, particuliere oplossing, enz.). U mag eerder gevonden resultaten uiteraard hergebruiken. Bij (b) zijn de beginwaarden niet gegeven; hier hoeft u de constanten niet uit te rekenen (maar bij (a) wel).

$(a)$ $\quad a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ voor $n \geq 1$ met $a_0 = 1$ en $a_1 = 4$.

$(b)$ $\quad a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 2 \cdot 2^n + n$ voor $n \geq 2$ met $a_0$ en $a_1$.

**Opgave 8.**
Los de onderstaande recurrente betrekking op met behulp van een genererende functie.

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} - 2 \quad \text{voor } n \geq 2 \text{ met } a_0 = 2 \text{ en } a_1 = 5.$$

**Opgave 9.**
Op een verjaardagstaart staan $n$ kaarsjes die de jarige moet uitblazen. Bij iedere keer blazen gaat er minstens één kaarsje uit; verder geldt dat als er $k$ kaarsjes op de taart staan, dan is de kans dat er precies $j$ kaarsjes worden uitgeblazen gelijk aan $1/k$, voor $j = 1, \ldots, k$. Bepaal het verwachte aantal malen dat de jarige moet blazen om alle kaarsjes uit te blazen.

De verwachte waarde van een stochast $X$ die met kans $P(X = x)$ een waarde $x$ kan aannemen is gelijk aan $\sum_{x \in S} x \cdot P(X = x)$, waarbij $S$ de verzameling van waarden is die $X$ kan aannemen; voor een gewone dobbelsteen vind je dan dat de verwachte waarde gelijk is aan $1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5$.

**Hint**. Stel een recurrente betrekking op.

**Opgave 10**
Bij een wedstrijd paintball is het de bedoeling dat groep A (bestaande uit $n$ kinderen) probeert ervoor te zorgen dat niemand van groep B (bestaande uit $k \leq n$ kinderen) de overkant haalt zonder geraakt te zijn. De leden van groep B hebben zich allen in dezelfde camouflagekleding gestoken en staan klaar om tegelijkertijd zo snel mogelijk naar de overkant te rennen. De leden van groep A zijn uitgerust met een paintball pistool; bij de overtocht hebben zij slechts de tijd om één persoon uit te kiezen (en uit te schakelen). Bereken de kans dat groep A wint, indien er geen tijd is om af te spreken wie wie onder vuur neemt. Ga er hierbij vanuit dat ieder schot raak is.

# Formules enz.

### Inclusion-Exclusion

Stel dat er in totaal $N$ objecten zijn. Ieder object kan $r$ verschillende eigenschappen, $a_1, \ldots, a_r$, bezitten. Het aantal objecten dat eigenschappen $a_{i_1}, \ldots, a_{i_t}$ bezit (en mogelijk nog andere eigenschappen) wordt genoteerd met $N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$; met $s_t = \sum N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$ wordt aangegeven dat er wordt gesommeerd over iedere combinatie van $t$ ($t = 0, \ldots, r$) verschillende eigenschappen. Verder geeft $N(a_1', \ldots, a_r')$ het aantal van de $N$ objecten aan die geen enkele van de $r$ eigenschappen bezitten. Nu geldt

$$N(a_1', \ldots, a_r') = N - s_1 + s_2 + \ldots + (-1)^k s_k$$

Evenzo kun je het aantal elementen met precies $m$ eigenschappen bepalen als

$$e_m = s_m - \binom{m+1}{1} s_{m+1} + \binom{m+2}{2} s_{m+2} + \ldots + (-1)^{r-m} \binom{m+r-m}{r-m} s_r.$$

### Binomium

Het uitgebreide binomium van Newton is gedefinieerd als

$$(1+x)^u = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{u}{r} x^r,$$

waarbij

$$\binom{u}{r} = \begin{cases} \frac{u(u-1)\ldots(u-r+1)}{r!} & \text{als } r > 0 \\ 1 & \text{als } r = 0 \end{cases}$$

Toepassing van de regel levert bijv.

$$\frac{1}{(1-x)^p} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+p-1}{p-1} x^r.$$

### Getal van Stirling

Het aantal mogelijkheden om $n$ genummerde ballen te verdelen over $k$ onherkenbare dozen waarbij geen enkele doos leeg blijft is het Stirling getal $S(n,k)$. Dit is gedefinieerd als

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$