Universiteit Utrecht
Betafaculteit
Examen Discrete Wiskunde op donderdag 17 maart 2016, 13.30-16.30 uur.

- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Schrijf op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer.
- Het examen omvat 11 opgaven met in totaal 12 (deel)opgaven.
- Op de vragen 1 en 2a kunnen maximaal 3 punten worden gescoord; op alle overige vragen, behalve 5b kunnen maximaal 4 punten worden gescoord. Opgave 5b is een bonusopgave waarop je maximaal 2 punten kunt scoren.
- Een rekenmachine is niet nodig en derhalve verboden. Eventuele rekenfouten worden niet bestraft, tenzij het de spuigaten uitloopt (dit ter beoordeling van de nakijker).
- Let erop dat ik ga proberen het tweede tentamen te verplaatsen van 17.00-20.00 naar 13.30-16.30, tenzij er protest wordt aangetekend; dit kan tot uiterlijk morgen.
- Er is op dinsdag 29 maart en donderdag 31 maart geen hoorcollege, maar op beide dagen is er wel werkcollege. Het werkcollege van donderdag 31 maart vindt plaats van 13.15-15.00 in Ruppert D (in plaats van het hoorcollege).

Succes!

==

Opgave 1.
Gegeven is een standaard pak kaarten (van ieder van de vier kleuren Schoppen, Harten, Ruiten en Klaveren zijn er dertien kaarten). Hieruit worden willekeurig 13 kaarten getrokken. Geef een uitdrukking voor de kans dat de 13 kaarten zodanig zijn getrokken dat er twee kleuren (van de vier) zijn waar vier kaarten van worden getrokken, één kleur waarvan er drie kaarten worden getrokken, en één kleur waarvan er twee kaaarten worden getrokken. De kans zelf hoef je niet uit te rekenen.

Opgave 2
Los de onderstaande recurrente betrekkingen op met de JBF methode (karakteristieke vergelijking, particuliere oplossing, enz.). U mag eerder gevonden resultaten uiteraard hergebruiken.

(a) $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ voor $n \geq 2$ met $a_0 = 1$ en $a_1 = 6$.

(b) $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 4 * 3^n + 8n$ voor $n \geq 2$ met $a_0 = 6$ en $a_1 = 14$.

Opgave 3
Een recreatieve hardloper wil aan een plaatselijke wedstrijd (bijv. Bunniks Mooiste of Om Odijk) meedoen. Om zich optimaal te prepareren wil hij voor die tijd nog k lichte en k zware trainingen uitvoeren. Deze moeten om de beurt (steeds een lichte gevolgd door een zware training) worden gedaan; alle lichte trainingen zijn hetzelfde, evenals alle zware trainingen. Na iedere lichte training heeft hij minstens één dag rust nodig, en na een zware training twee dagen; tussen de laatste zware training en de wedstrijd mogen maximaal 4 dagen zitten (en minstens 2). Bereken het aantal mogelijke trainingsschema's. Neem aan dat hij op dag 1 kan beginnen met trainen, en dat de wedstrijd plaats vindt op dag n (en dat dus de laatste zware training plaatsvindt op dag $n-5, n-4$ of $n-3$).

Opgave 4
Gegeven is een willekeurige permutatie π van $2n$ elementen. We splitsen de permutatie op in deelcykels. Bereken de kans dat de permutatie uiteenvalt in precies twee deelcykels met grootte n.

N.B. Controleer uw antwoord voor de situatie met $n = 1$ voor het addertje onder het gras.

Opgave 5
(a) Voor een spelprogramma van het soort Expeditie Poolcirkel moeten twee teams van twee mensen hun krachten meten in een slederace, waarbij iedere slede met hetzelfde gewicht van zo'n 120 tot 160 kilo wordt beladen (de trekkracht wordt geleverd door de deelnemers zelf). Om aan gewicht te komen wordt opdracht gegeven om 10 keien te verzamelen; iedere kei moet een ander, geheeltallig gewicht hebbben van minstens 60 en maximaal 80 kilo.

Toon aan dat het met deze combinatie van 10 stenen altijd mogelijk is om beide sleden even zwaar te beladen met een gewicht ≥ 120 en ≤ 160 kilo.

(b) Helaas heeft de productie naar een 'expert' geluisterd die beweerde dat slechts 7 van dit soort stenen ook wel genoeg was. Op het moment dat de opnamen beginnen, blijkt het toch niet mogelijk om beide sleden even zwaar te beladen met een gewicht ≥ 120 en ≤ 160 kilo. Daarom wordt een list verzonnen: één van de deelnemers veinst een blessure, en de race wordt gehouden tussen het team van twee en de eenling, waarbij de eenling de helft van het gewicht op de slee krijgt. Toon aan dat dit wel mogelijk is.

Opgave 6
De twee teams die in de reguliere competitie het hoogst zijn geëindigd spelen na afloop een play-off in de vorm van een 'best of $2n + 1$' tegen elkaar: wie het eerst $n + 1$ wedstrijden wint is de eindwinnaar. Iedere expert beschouwt de teams als gelijkwaardig, en derhalve heeft ieder team een kans van 50% om een wedstrijd te winnen, en dus ook om eindwinnaar te worden. Dit is tegen het zere been van de sponsor van Team 1, die natuurlijk wil dat de kans dat zijn/haar team wint zo groot mogelijk is. Na een onderonsje met de leden van de overkoepelende bond weet deze sponsor te regelen dat het team dat na afloop van de reguliere competitie bovenaan staat (laat dat nou net Team 1 zijn) een voordeel krijgt: dit team hoeft slechts n wedstrijden te winnen, terwijl Team 2 wel $n + 1$ wedstrijden moet winnen om eindwinnaar te worden. Bepaal de kans dat Team 1 eindwinnaar wordt; hier mag **geen sommatie in voorkomen**. Voor iedere losse wedstrijd geldt nog steeds dat beide teams 50% kans hebben om te winnen.

Opgave 7
Bereken met behulp van een genererende functie het aantal mogelijke triples van gehele, niet-negatieve getallen (x, y, z) waarvoor geldt $x \leq y$, $x \leq z$ en $x+y+z \in \{13, 14, 15\}$. Het is hierbij de bedoeling dat u zowel de genererende functie als het aantal mogelijkheden bepaalt.

Berekeningen zonder genererende functie kosten alleen tijd en leveren niets op. Je hoeft niet te bewijzen dat je een genererende functie mag gebruiken in deze situatie.

Opgave 8
Op een verjaardagstaart staan n kaarsjes die de jarige moet uitblazen. Bij iedere keer blazen gaat er minstens één kaarsje uit; verder geldt dat als er k kaarsjes op de taart staan, dan is de kans dat er precies j kaarsjes worden uitgeblazen gelijk aan $1/k$, voor $j = 1, \ldots, k$. Bepaal het verwachte aantal malen dat de jarige moet blazen om alle kaarsjes uit te blazen.

Opgave 9
Het aantal manieren om n herkenbare ballen te verdelen over k *onherkenbare* dozen die niet leeg mogen zijn is gelijk aan $S(n, k)$ (zie achteraan het tentamen). Geef een combinatorisch bewijs van de volgende recurrente betrekking:

$$k^n - k!S(n,k) = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (k-j)!S(n, k-j)$$

Opgave 10.
Los de onderstaande recurrente betrekking op met behulp van een genererende functie.

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2 \quad \text{voor } n \geq 2 \text{ met } a_0 = 2 \text{ en } a_1 = 1.$$

Opgave 11.
Vroeger was het simpel: werken op maandag t/m vrijdag en in het weekend vrij en dan nog 30 extra vrije dagen. Bedrijf X heeft echter behoefte aan werknemers die ook op zondag willen werken, en daarom adverteren ze met de volgende arbeidsvoorwaarden: werk op iedere zondag, dan krijg je elke vierde dag en iedere elfde dag vrij (mits deze niet op zondag vallen) en ook nog eens 40 dagen per jaar extra, vrij opneembaar (maar natuurlijk niet op zondag). Bereken het verschil in aantallen vrije dagen tussen de oude en de nieuwe situatie voor de periode van een jaar met 365 dagen zonder feestdagen, waarbij de eerste dag op een maandag valt.

Enumeratie kost alleen tijd en levert niets op.

Formules enz.

Inclusion-Exclusion
Stel dat er in totaal N objecten zijn. Ieder object kan r verschillende eigenschappen, $a_1, \ldots, a_r$, bezitten. Het aantal objecten dat eigenschappen $a_{i_1}, \ldots, a_{i_t}$ bezit (en mogelijk nog andere eigenschappen) wordt genoteerd met $N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$; met $s_t = \sum N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$ wordt aangegeven dat er wordt gesommeerd over iedere combinatie van t $(t = 1, \ldots, r)$ verschillende eigenschappen. Verder geeft $N(a'_1, \ldots, a'_r)$ het aantal van de N objecten aan die geen enkele van de r eigenschappen bezitten. Nu geldt

$$N(a'_1, \ldots, a'_r) = N - s_1 + s_2 + \ldots + (-1)^r s_r$$

Binomium
Het uitgebreide binomium van Newton is gedefinieerd als

$$(1+x)^u = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{u}{r} x^r,$$

waarbij

$$\binom{u}{r} = \begin{cases} \frac{u(u-1)\ldots(u-r+1)}{r!} & \text{als } r > 0 \\ 1 & \text{als } r = 0 \end{cases}$$

Toepassing van de regel levert bijv.

$$\frac{1}{(1-x)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+p-1}{p-1} x^k.$$

Het aantal mogelijkheden om n genummerde ballen te verdelen over k onherkenbare dozen is het Stirling getal $S(n,k)$. Dit is gedefinieerd als

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$