Tentamen Lineaire Algebra
donderdag 29 januari 2015, 9.00-12.00 uur

- Het is niet toegestaan telefoons, computers, grafische rekenmachines (wel een gewone), dictaten, boeken of aantekeningen te gebruiken.
- Schrijf op elk vel je naam, studentnummer en groepnummer (Groep 1: João Mestre, Julius Linssen, Richard Schoonhoven; groep 2: Dana Balibanu, Matthijs Lip, Steyn van Leeuwen; groep 3 Jan van Zweeden, Menno de Boer; groep 4: Thom Klaasse, Jetze Zoethout; groep 5: Tom Bannink, Lois van der Meijden.
- Alle opgaven tellen even zwaar, 10 punten per opgave. Er is een bonusopgave (opgave 6, maximaal 5 punten) waarmee je het cijfer van het tentamen op kunt halen. Het cijfer van je tentamen is het behaalde aantal punten gedeeld door 5, met dien verstande dat het tentamencijfer nooit hoger kan zijn dan een 10.
- Geef niet alleen antwoorden, maar bewijs al je beweringen.

SUCCES!

1. In $\mathbb{R}^4$ geven we het punt $P = (1, 2, 2, 1)^t$ en de lineaire deelruimte W die gegeven wordt door $2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$.
(a) (4 punten) Bepaal de afstand tussen P en W.
(b) (6 punten) Geef een orthonormale basis van W.

2. Laat $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ de lineaire afbeelding zijn die t.o.v. de standaard bases de volgende matrix heeft:
$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 & -2 \\ 6 & 5 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$
(a) (4 punten) Bepaal $\mathrm{Ker}(A)$. Wat is de dimensie van $\mathrm{Ker}(A)$?
(b) (2 punten) Bepaal met behulp van een stelling de dimensie van $A(\mathbb{R}^4)$.
(c) (4 punten) Bepaal een basis van $A(\mathbb{R}^4)$ en toon aan dat je antwoord van onderdeel (b) inderdaad klopt.

3. (a) (2 punten) Toon aan dat $(1, 0, -1)^t$ een eigenvector is van
$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
(b) (8 punten) Bepaal de andere eigenwaarden en eigenvectoren van G.

4. Zij $V = \mathbb{R}[x]$ de vectorruimte van polynomen in x met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging.
(a) (2 punten) Toon aan dat $W = \{f(x) \in V \mid f(0) = f(1) = 0\}$ een lineaire deelruimte is van V.
(b) (2 punten) Zij $B : V \to W$ die gegeven wordt door $B(f(x)) = (x^2 - x)f'(x)$.

Toon aan dat B een lineaire afbeelding is.
(c) (2 punten) Is B injectief? Is B surjectief?
(d) (2 punten) Laat $U = W \cap \mathbb{R}[x]_5$ (waarbij $\mathbb{R}[x]_5$ is de deelruimte van V is die bestaat uit polynomen van graad kleiner of gelijk aan 5). Bepaal een geordende basis C van U.
(e) (2 punten) Zij $\mathbf{e}_i = x^i$ en $E = \{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ een geordende basis van $\mathbb{R}[x]_4$. Laat $A : \mathbb{R}[x]_4 \to U$ die ook wordt gegeven door $A(f(x)) = (x^2 - x)f'(x)$. Bepaal de matrix A_C^E van A ten opzichte van de bases E en C.

5. Zij $A_{3,3}$ de vectorruimte van reële antisymmetrische 3×3-matrices, d.w.z. matrices die voldoen aan $X^t = -X$.
(a) (2 punten) Toon aan dat

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

een basis vormt van $A_{3,3}$.
(b) (2 punten) Bewijs dat de afbeelding $T : A_{3,3} \to \mathbb{R}^3$ die gegeven wordt door

$$T\left(\begin{pmatrix} 0 & x & z \\ -x & 0 & y \\ -z & -y & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

lineair is.
(c) (3 punten) Laat $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ het standaard inproduct op $\mathbb{R}^3$ zijn. Bewijs dat voor $A, B \in A_{3,3}$ de formule $\langle A, B\rangle = T(A) \cdot T(B)$, een inproduct definieert op $A_{3,3}$.
(d) (3 punten) Laat $A, B \in A_{3,3}$, definieer het product $A \otimes B = AB - BA$ (N.B. $A \otimes B \in A_{3,3}$, dit hoef je niet te bewijzen). Toon aan dat $T(A \otimes B) = T(A) \times T(B)$, waarbij $\times$ staat voor het uitproduct op $\mathbb{R}^3$.

6. (Bonusopgave) Zij $V = \mathbb{R}[x]$ de vectorruimte van polynomen in x met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging. Laat $\langle p(x), q(x)\rangle$ een inproduct zijn op V. Definieer polynomen $p_j(x)$ door $p_0(x) = 1$ en

$$p_j(x) = \det \begin{pmatrix} \langle 1,1\rangle & \langle 1,x\rangle & \langle 1,x^2\rangle & \cdots & \langle 1,x^{j-1}\rangle & 1 \\ \langle x,1\rangle & \langle x,x\rangle & \langle x,x^2\rangle & \cdots & \langle x,x^{j-1}\rangle & x \\ \langle x^2,1\rangle & \langle x^2,x\rangle & \langle x^2,x^2\rangle & \cdots & \langle x^2,x^{j-1}\rangle & x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle x^j,1\rangle & \langle x^j,x\rangle & \langle x^j,x^2\rangle & \cdots & \langle x^j,x^{j-1}\rangle & x^j \end{pmatrix}, \quad \text{voor } j > 0.$$

(a) (2 punten) Toon aan dat $\langle p_j(x), x^k\rangle = 0$ voor $k = 0, 1, 2, \ldots, j-1$.
(b) (3 punten) Bewijs dat $\langle p_j(x), p_k(x)\rangle = 0$ voor $j \neq k$.