Tentamen Grondslagen van de Wiskunde B

DIT TENTAMEN BEVAT 5 OPGAVEN; ZIE OOK DE OMMEZIJDE.

27 januari 2020, 09:00–12:00

Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. Laat L een taal zijn, M een L-structuur en $A \subset M$ een deelverzameling. Een element $x \in M$ heet *algebraïsch over* A als er een L-formule $\phi(\vec{u}, v)$ met $n+1$ vrije variabelen is, en een n-tupel $a_1, \ldots, a_n$ van elementen van A, zodat het volgende geldt:

i) $M \models \phi(\vec{a}, x)$.

ii) De verzameling $\{y \in M \mid M \models \phi(\vec{a}, y)\}$ is *eindig*.

Bewijs het volgende: als x algebraïsch over A is en N is een elementair submodel van M zodat $A \subset N$, dan geldt $x \in N$.

Opgave 2. Laat L de taal van ringen; L heeft constanten $0, 1$ en binaire functiesymbolen $\cdot$ en $+$. Met $\mathcal{N}$ geven we het standaardmodel van de Peano rekenkunde aan: de verzameling $\mathbb{N}$ met de voor de hand liggende interpretatie van de constanten en functiesymbolen.

a) (4) Laat zien dat er voor elk natuurlijk getal n een L-term $\overline{n}$ is, zodat $\overline{n}^{\mathcal{N}} = n$.

b) (6) Laat zien dat er een L-structuur M is met de volgende eigenschappen:

   i) $\mathcal{N}$ is een elementaire substructuur van M.

   ii) M bevat een element c zodat $M \models \neg(c = 0)$ en voor elk priemgetal p geldt: $M \models \exists x(x \cdot \overline{p} = c)$.

Opgave 3. Bewijs door middel van bewijsbomen:

a) (3) $\exists x(\psi \to \phi(x)) \vdash \psi \to \exists x \phi(x)$ (x komt niet in ψ voor)

b) (4) $\forall x(\phi(x) \to \psi) \vdash (\exists x \phi(x)) \to \psi$ (x komt niet in ψ voor)

c) (3) $\{\phi \to \chi, \psi \to \chi\} \vdash (\phi \vee \psi) \to \chi$

Opgave 4. In deze opgave bekijken we de theorie T_p van p-groepen: een p-groep (voor een priemgetal p) is een abelse groep waarin elk element orde p heeft. We werken met de taal $L = \{0, +\}$, en de theorie T_p heeft, naast de axioma's voor een abelse groep, een axioma

$$\forall x(\underbrace{x + \cdots + x}_{p} = 0)$$

a) (3) Laat $\mathbb{F}_p$ het lichaam met p elementen zijn. Laat zien dat iedere p-groep een $\mathbb{F}_p$-vectorruimte is.

b) (4) Laat zien dat de theorie T_p κ-kategorisch is, voor *elk* kardinaalgetal κ.

c) (3) Is de theorie T_p volledig? Motiveer je antwoord.

Opgave 5. Een kardinaalgetal κ heet *regulier* als voor elk ordinaalgetal $\alpha < \kappa$ en elke functie $f : \alpha \to \kappa$ er een ordinaalgetal $\beta < \kappa$ is waarvoor geldt dat $f(\gamma) < \beta$, voor alle $\gamma \in \alpha$.

a) (5) Laat zien dat het eerste overaftelbare ordinaalgetal ω_1 een regulier kardinaalgetal is.

b) (5) Construeer een kardinaalgetal $\kappa > \omega_1$ dat niet regulier is.