Tentamen Grondslagen van de Wiskunde A

16 december 2019, 09:00–12:00

Dit tentamen bevat 5 opgaven; zie ook de ommezijde.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. Bepaal van ieder van de volgende verzamelingen of zij eindig, aftelbaar oneindig of overaftelbaar is; motiveer je antwoord kort.

a) (3) $\{x \in \mathbb{R} \mid \mathrm{e}^{\sin(x)} \in \mathbb{Q}\}$

b) (4) $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \geq 2\}$ is eindig$\}$

c) (3) $\{A \subseteq \mathbb{N} \mid A$ is oneindig$\}$

Opgave 2. Gegeven is een gerichte graaf, met verzameling punten V. Voor elementen x, y van V schrijven we $R(x, y)$ voor de bewering dat er een pijl is van x naar y.

Bewijs dat er een deelverzameling A van V is met de volgende eigenschappen:

i) voor alle $x, y \in A$ met $x \neq y$ geldt *niet* $R(x, y)$.

ii) voor elke $x \in V - A$ is er een $y \in A$ zodat $R(x, y)$ of $R(y, x)$.

[Hint: pas het lemma van Zorn toe op de poset van deelverzamelingen A van V die aan i) voldoen]

Opgave 3. Laat X een oneindige verzameling zijn. Volgens het lemma van Hartogs is er een welordening M zodat er geen injectieve functie $M \to X$ is.

a) (6) Bewijs dat er een welordening L is met de volgende eigenschappen:

i) Er is geen injectieve functie $L \to X$.

ii) Voor elke welordening $L' \prec L$ (dus $L' \preceq L$ maar $L \not\preceq L'$) is er wel een injectieve functie $L' \to X$.

b) (4) Stel L is als in deeltje a). Laat zien: als $x_0 < x_1 < \cdots$ een oneindig, strict stijgend rijtje elementen van L is, dan heeft dit rijtje een bovengrens in L. [Hint: beschouw de verzameling $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} L_{<x_i}$, waarbij $L_{<y}$ staat voor de verzameling $\{z \in L \mid z < y\}$]

Opgave 4.

a) (5) Zij L de taal met 1-plaatsig relatiesymbool I en 2-plaatsig relatiesymbool $\leq$. Laten M_1 en M_2 de volgende L-structuren zijn: $M_1 = \mathbb{R}$ met $\leq$ de gewone ordening, en $I^{M_1} = \{r \in \mathbb{R} \mid r^2 < 2\}$; $M_2 = \mathbb{Q}$ met $\leq$ de gewone ordening, en $I^{M_2} = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 2\}$. Geef een L-zin die waar is in M_1 maar onwaar in M_2.

b) (5) Dezelfde opgave als in a), maar nu voor de taal $L = \{\cdot, S\}$ waar $\cdot$ een 2-plaatsig functiesymbool is en S een 1-plaatsig functiesymbool; $M_1 = \mathbb{R}$ met $\cdot$ de normale vermenigvuldiging en $S^{M_1}(x) = x + 1$; $M_2 = \mathbb{C}$ met $\cdot$ de normale vermenigvuldiging en $S^{M_2}(x) = x + 1$.

Opgave 5.In deze opgave beschouwen we enkelvoudige grafen: dit zijn structuren voor de taal $\{R\}$ waar R een 2-plaatsig relatiesymbool is (als in opgave 2). Een *pad van x naar y van lengte n* is een rijtje $x = a_0, a_1, \ldots, a_n = y$ met $R(a_i, a_{i+1})$ voor alle $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Veronderstel nu dat (X, R^X) een enkelvoudige graaf is die aan de volgende voorwaarden voldoet:

i) voor alle $x, y \in X$ is er een pad van x naar y.

ii) voor elke $n \in \mathbb{N}$ zijn er x, y zodat er geen pad van x naar y is van lengte $\leq n$.

Bewijs, dat er een enkelvoudige graaf (Y, R^Y) bestaat met de eigenschappen:

i) voor elke L-zin ϕ geldt $(X \models \phi) \Leftrightarrow (Y \models \phi)$.

ii) er zijn $a, b \in Y$ zodat er geen pad is van a naar b.

[Hint: gebruik de Compactheidsstelling.]