

Hertentamen Speltheorie

15 april 2020.

Schrijf je naam en studentnummer op elk blad dat je inlevert. Geef bij elk antwoord een motivatie. Let op leesbaarheid. Netheid wordt ook beoordeeld. Let op: er zijn vier opgaven.

Opgave 1 (25 pt)

Beschouw het zero-sum spel waarvan de payoff matrix voor de rij speler gegeven wordt door:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- Elimineer alle strategieën die strikt gedomineerd worden door een andere, eventueel gemengde, strategie. Doe dit voor zowel de rij- als de kolomspeler.
- Bepaal de waarde (value) van dit spel.
- Geef de maximin strategie(ën) van de rij-speler en de minimax strategie(ën) van de kolom-speler.

Opgave 2 (25 pt)

Het IT bedrijf Volks-soft (VS) wil z'n concurrent DataBert (DB) overnemen, hoewel DB liever zelfstandig blijft. Een bekende tactiek in zulke situaties is de zogenaamde 'poison pill'. Hierbij leent DB een grote hoeveelheid geld van de bank en investeert dat in gebouwen of hardware. Vanwege de schulden die DB dan maakt, wordt DB minder aantrekkelijk voor VS.

Echter, als DB financieel zwak is, dan weegt het nadeel van de extra rentelasten zwaarder dan het voordeel van de investeringen. Als DB financieel sterk is, dan is het andersom.

VS weet niet of DB sterk is of niet, maar wel dat de kans dat dit zo is $1/2$ is en dat de kans dat DB zwak is ook $1/2$ is. Het spel wordt als volgt gespeeld. Eerst bepaalt Nature of DB financieel sterk of zwak is, volgens de bovengenoemde kansen. Dan beslist DB of hij investeert (I) of Niet (N). Als DB sterk is en hij speelt I , dan levert hem dat een bijdrage van $+1$ aan

zijn totale payoff. Als hij zwak is en hij speelt I , dan levert hem dat een bijdrage van -1 aan zijn totale payoff. Als hij N speelt, dan levert hem dat een bijdrage van 0 aan zijn totale payoff.

Volks-soft kan zien of DataBert I heeft gespeeld of N . VS kan dan Overname (O) spelen of Laatmaar (L). Als DB niet heeft geïnvesteerd en VS speelt O , dan is de payoff voor VS $+2$ als DB financieel sterk blijkt en -1 als DB zwak is. Als DB wel heeft geïnvesteerd, dan zijn de payoffs voor VS als hij O speelt $+1$ als DB sterk is en -2 als DB zwak is. Als Volks-soft L speelt is z'n payoff 0 .

Tenslotte krijgt DB een bonus van $+1$ als hij niet wordt overgenomen.

- (a) Teken de extensive form van dit signalling spel.
- (b) Bepaal alle Nash evenwichten in zuivere strategieën.
- (c) Bepaal welke evenwichten perfect Bayesian zijn. Geef in die gevallen de bijbehorende beliefs.

Opgave 3 (25 pt)

Firma X produceert laptops en firma Y tablets. De prijzen van deze producten hangen af van de kwantiteiten waarin ze geproduceerd worden. In het bijzonder geldt dat:

$$p_1 = \max\{6 - 3q_1 - 2q_2, 0\}, \quad p_2 = \max\{4 - 2q_1 - q_2, 0\},$$

waarbij p_1 de prijs, en q_1 de kwantiteit, van de geproduceerde laptops is. De prijzen en geproduceerde hoeveelheden tablets zijn, respectievelijk, p_2 en q_2 . We nemen aan dat beide firma's dezelfde kosten $c = 1/2$ per product hebben. De firma's concureren op kwantiteit. Dat wil zeggen, ze zijn zich bewust van de prijsfuncties en proberen een hoeveelheid q_i , $i = 1, 2$ te produceren die hun winst zal optimaliseren.

- (a) Geef voor elke firma de payoff functie.
- (b) Bepaal het Nash evenwicht, in deze context ook wel Cournot evenwicht genoemd, in termen van geproduceerde hoeveelheden.
- (c) Bereken de prijs van een laptop en van een tablet in deze markt en de winsten van beide firma's.

Opgave 4 (25 pt)

Beschouw het coöperatieve spel (N, ν) met $N = \{1, 2, 3\}$ en $\nu(1) = 0$, $\nu(2) = 6$, $\nu(3) = 0$, $\nu(1, 2) = 10$, $\nu(1, 3) = 4$, $\nu(2, 3) = 12$ en $\nu(1, 2, 3) = 16$.

- (a) Bepaal voor elke speler de Shapley-waarde.
- (b) Geef een diagram van de kern van dit spel.
- (c) Bereken de nucleolus van dit spel.