Docent: Yu.A. Kuznetsov
Assistants: A. Tataris, L. Chiarini, P. van Dieten
K. Power, A. Greven, A. de Potter

UITWERKING TENTAMEN DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WISB231)

09 april 2020, 13:30-16:30 uur

Opgave 1 [15 pt] Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) [5 pt] Vind $\det(\mathrm{e}^{xA})$.

$$\det(\mathrm{e}^{xA}) = \mathrm{e}^{\mathrm{Sp}(xA)} = \mathrm{e}^{x\mathrm{Sp}(A)} = \mathrm{e}^{-3x}.$$

(b) [10 pt] Bereken e^{xA}.

De karakteristieke vergelijking van A is

$$\det(A - \lambda E) \;=\; -(\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1) \;=\; -(\lambda+1)^3 \;=\; 0$$

met één drievoudige wortel $\lambda_1 = -1$. De matrix A heeft dus één eigenwaarde $\lambda_1 = -1$ met de algebraische multipliciteit $m = 3$. Zij

$$B \;:=\; A - \lambda_1 E \;=\; A + E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

dan zijn er twee methoden om e^{xA} te berekenen.

Methode I: Er geldt

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad B^3 = 0$$

dus is B nilpotent met de nilpotentiegraad 3. Hieruit volgt dat

$$\mathrm{e}^{xA} = \mathrm{e}^{x(B-E)} = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{xB} = \mathrm{e}^{-x}\left(E + xB + \frac{x^2}{2}B^2\right)$$

ofwel

$$\mathrm{e}^{xA} = \mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} 1 + \frac{x^2}{2} & x & 2x + \frac{x^2}{2} \\ x + x^2 & 1 + 2x & 5x + x^2 \\ -\frac{x^2}{2} & -x & 1 - 2x - \frac{x^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Methode II: Er geldt rank $B = 2$, waaruit blijkt dat $\dim \mathrm{Ker}\, B = 3-2 = 1$ en dus bestaat er één Jordan-keten van lengte 3 voor de eigenwaarde $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{cases} Bv &= 0, \\ Bu &= v, \\ Bw &= u. \end{cases}$$

Neem een willekeurige

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$$

dan geldt

$$u = Bw = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_2 + 2w_3 \\ w_1 + 2w_2 + 5w_3 \\ -w_2 - 2w_3 \end{pmatrix}$$

en

$$v = Bu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2 + 2w_3 \\ w_1 + 2w_2 + 5w_3 \\ -w_2 - 2w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 + w_3 \\ 2w_1 + 2w_3 \\ -w_1 - w_3 \end{pmatrix} = (w_1 + w_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Het blijkt dat $v \in \mathbb{R}^3$ voldoet aan $Bv = 0$ ofwel

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

voor alle (w_1, w_2, w_3). Met $w_1 = w_2 = 2, w_3 = -1$ krijgen we de Jordan-keten

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Deze vectoren zijn lineair onafhankelijk en de matrix

$$S = (v \mid u \mid w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

is niet singulier met $\det S = 1$ en

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Een fundamentale matrix voor $y' = Ay$ is

$$\Psi(x) = \mathrm{e}^{-x} \left(v \;\middle|\; u + xv \;\middle|\; w + xu + \frac{x^2}{2} v \right) = \mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} 1 & x & 2 + \dfrac{x^2}{2} \\ 2 & 1 + 2x & 2 + x + x^2 \\ -1 & -x & -1 - \dfrac{x^2}{2} \end{pmatrix}$$

met $\Psi(0) = S$. Dus

$$\mathrm{e}^{xA} = \Psi(x)[\Psi(0)]^{-1} = \Psi(x) S^{-1} = \mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{x^2}{2} & x & 2x + \dfrac{x^2}{2} \\ x + x^2 & 1 + 2x & 5x + x^2 \\ -\dfrac{x^2}{2} & -x & 1 - 2x - \dfrac{x^2}{2} \end{pmatrix}$$

Er is een andere manier om de gevonden Jordan-keten te gebruiken. Merk op dat de substitutie $y = Sz$ transformeert $y' = Ay$ naar $z' = Jz$ met

$$J = S^{-1} A S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -E + N,$$

waarin

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = 0.$$

Dan geldt

$$S^{-1}\mathrm{e}^{xA}S = \mathrm{e}^{xS^{-1}AS} = \mathrm{e}^{xJ} = \mathrm{e}^{-xE}\mathrm{e}^{xN} = \mathrm{e}^{-x}\left(E + xN + \frac{x^2}{2}N^2\right) = \mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt

$$\mathrm{e}^{xA} = S\mathrm{e}^{xJ}S^{-1} = \mathrm{e}^{-x}S\begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}S^{-1} = \mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} 1+\frac{x^2}{2} & x & 2x+\frac{x^2}{2} \\ x+x^2 & 1+2x & 5x+x^2 \\ -\frac{x^2}{2} & -x & 1-2x-\frac{x^2}{2} \end{pmatrix},$$

net zoals bij de andere methoden.

Merk op dat $\det(\mathrm{e}^{xA}) = \mathrm{e}^{-3x}$, zoals in (a).

Opgave 2 [25 pt] Beschouw het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & y, \\ \dot{y} & = & (1-x^2-y^2)y - x. \end{array}\right. \tag{2}$$

(a) [5 pt] Bepaal alle rustpunten van (2).

De coördinaten van rustpunten zijn de oplossingen van het stelsel

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 0, \\ (1-x^2-y^2)y - x & = & 0, \end{array}\right.$$

dat slechts één oplossing $(x, y) = (0, 0)$ heeft. Dus is er één rustpunt: $O = (0, 0)$.

(b) [10 pt] Maak de transformatie naar poolcoördinaten $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$. Laat zien dat het stelsel (2) onder deze transformatie overgaat in het volgende stelsel:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{r} & = & r(1-r^2)\sin^2\varphi, \\ \dot{\varphi} & = & -1 + (1-r^2)\sin\varphi\cos\varphi. \end{array}\right. \tag{3}$$

We hebben

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ \dot{y} & = & \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi, \end{array}\right.$$

en

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & r\sin\varphi, \\ \dot{y} & = & r(1-r^2)\sin\varphi - r\cos\varphi \end{array}\right.$$

dus

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{r}\cos\varphi - \dot{\varphi}r\sin\varphi & = & r\sin\varphi, \\ \dot{r}\sin\varphi + \dot{\varphi}r\cos\varphi & = & r(1-r^2)\sin\varphi - r\cos\varphi. \end{array}\right.$$

Dit is een lineaire stelsel voor $(\dot{r}, \dot{\varphi})$,

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\varphi \\ r(1-r^2)\sin\varphi - r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

en de matrix van dit stelsel is inverteerbaar voor $r > 0$ met inverse

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\varphi & r\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Dit stelsel heeft de unique oplossing

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r\cos\varphi & r\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\sin\varphi \\ r(1-r^2)\sin\varphi - r\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(1-r^2)\sin^2\varphi \\ -1+(1-r^2)\sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix},$$

die met (3) overeenkomt.

(c) [5 pt] Laat zien dat (2) één periodieke baan heeft en vind de bijbehorende periodieke oplossing. Bepaal tevens de periode van deze oplossing.

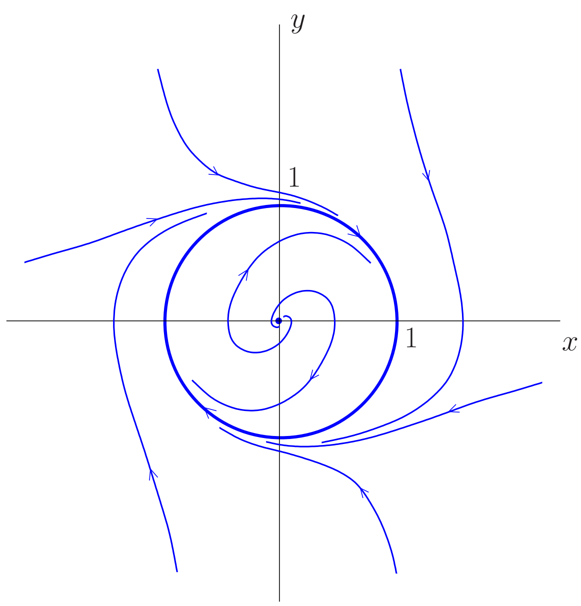
De cirkel $r = 1$ is een invariante kromme voor (3), want $r = 1 \Longrightarrow \dot{r} = 0$. Deze cirkel bevat geen rustpunten (zie (a)) en is dus een periodieke baan van (2). De bijbehorende oplossing met $(x(0), y(0)) = (1, 0)$,

$$\begin{cases} x(t) &= \cos(t), \\ y(t) &= -\sin(t), \end{cases}$$

heef periode 2π.

Deze periodieke baan is eenduidig omdat $\dot{r} \geq 0$ voor alle $0 < r < 1$ en $\dot{r} \leq 0$ voor alle $r > 1$ (met $\dot{r} = 0$ alleen als $\varphi = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$). Dus $r(t) \to 1$ wanneer $t \to +\infty$ voor alle oplossingen met $r(0) > 0$ en $r(0) \neq 1$.

(d) [5 pt] Schets het faseplaatje behorend bij (2) in het (x, y)-vlak. Zet ook pijltjes!



Figuur 1: Faseplaatje van (2) in het (x, y)-vlak.

Er geldt $\dot{\varphi} = -1 + \frac{1}{2}(1-r^2)\sin(2\varphi) < 0$ voor alle $r > 0$ en alle φ, want $|\sin(2\varphi)| \leq 1$. Dus, draait iedere baan met de klok mee rond het rustpunt O. Er is ook één periodieke baan $x^2 + y^2 = 1$. Alle banen behalve het rustpunt convergeren naar deze periodieke baan als $t \to +\infty$ (zie Figuur 1). Merk op dat alle banen de x-as verticaal passeren.

Opgave 3 [40 pt] Beschouw het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \dot{q} &= -q + \frac{1}{2}p + q^2, \\ \dot{p} &= p - 2qp. \end{cases} \tag{4}$$

(a) [5 pt] Bepaal alle rustpunten van (4) in het (q,p)-vlak.

De rustpunten voldoen aan het stelsel

$$\begin{cases} -q + \frac{1}{2}p + q^2 &= 0, \\ p(1-2q) &= 0. \end{cases}$$

Dit stelsel (2) heeft drie rustpunten (twee met $p = 0$ en één met $q = \frac{1}{2}$):

$$E_0 = (0,0), \quad E_1 = (1,0), \quad E_2 = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right).$$

(b) [5 pt] Bewijs dat (4) herschreven kan worden als een Hamilton-stelsel

$$\begin{cases} \dot{q} &= \dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p}, \\ \dot{p} &= -\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial q}, \end{cases}$$

en vind de Hamiltonfunctie $H = H(q,p)$ zo dat $H(0,0) = 0$.

De Hamiltonfunctie met $H(0,0) = 0$ is evident: $H(q,p) = \frac{1}{4}p^2 - qp + q^2 p$.

(c) [5 pt] Laat zien dat de verzamelingen $L = \{(q,p) \in \mathbb{R}^2 : p = 0\}$ en $S = \{(q,p) \in \mathbb{R}^2 : p = 4q(1-q)\}$ invariant zijn voor (4), d.w.z. bestaan uit de banen van (4).

De Hamiltonfinctie is gelijk aan $H(q,p) = \frac{1}{4}p(p - 4q(1-q))$. Dus is $L \cup S$ de niveauverzameling $H(q,p) = 0$. Omdat H de constante van beweging is, bestaan de niveau krommen van H uit de banen van (4).

(d) [10 pt] Bepaal de types van alle rustpunten van (4), in het bijzonder hun stabiliteit.

De linearisatie matrices van (2) in de rustpunten E_0, E_1 zijn

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

respectievelijk. De eigenwaarden van zowel A_0 als A_1 zijn $\lambda_{1,2} = \pm 1$. De linearisaties dus hebben de hyperbolische zadelpunten in $E_{0,1}$. Wegens de Stelling van Grobman-Hartman, is ieder punt ook een zadelpunt voor (4), zie Figuur 2. Deze rustpunten zijn instabiel.

De types van de punten E_0, E_1 kan je ook zonder de Stelling van Grobman-Hartman vaststellen. Deze punten zijn de snijpunten van de invariante verzamelingen L en S. Dus in een omgeving van ieder punt ziet de niveauverzamenling $H(q,p) = 0$ er uit als een kruis. Er zijn dus precies twee banen die convergeren naar ieder rustpunt als $t \to +\infty$ en twee banen die daar naartoe covergeren als $t \to -\infty$. $E_{0,1}$ zijn dus de zadelpunten.

De matrix van de linearisatie van (2) in het rustpunt E_2 is

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De eigenwaarden van A_2 zijn $\lambda_{1,2} = \pm \frac{i}{\sqrt{2}}$. Dus heeft de linearisatie een centrumpunt in E_2. Omdat (4) een Hamilton-stelsel is, is dit rustpunt ook een centrumpunt voor (4), d.w.z. alle banen van (4) in een omgeving van E_2 zijn gesloten. E_2 is dus Lyapunov-stabiel.

Om te bewijzen dat alle banen in een omgeving van E_2 gesloten zijn, schrijf

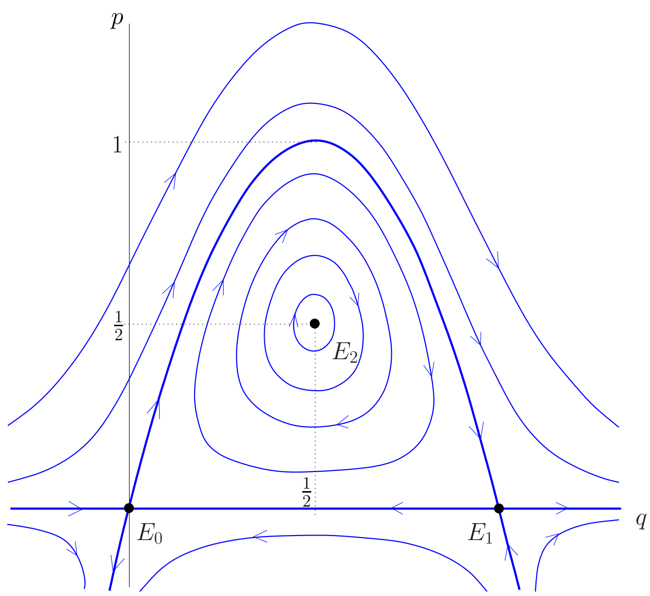
$$q = \frac{1}{2} + x, \quad p = \frac{1}{2} + y.$$

Dan

$$H = -\frac{1}{16} + \frac{1}{4}(2x^2 + y^2) + o(x^2 + y^2).$$

Hieruit volgt dat de Hamiltonfunctie een lokaal minimum in E_2 heeft.

(e) [10 pt] Schets het faseplaatje behorend bij (4) in het (q, p)-vlak. Let op de rustpunten en andere speciale banen. Zet ook pijltjes!



Figuur 2: Faseplaatje van (4) in het (q, p)-vlak.

(f) [5 pt] Bereken de oplossing $(q(t), p(t))$ van (4) met $(q(0), p(0)) = (\frac{1}{2}, 1)$.

Hints: De bijbehorende baan bevindt zich in S. Zet dus $p = 4q(1-q)$ in de eerste differentiaalvergelijking van (4) en los die op.

De differentiaalvergelijking voor $q = q(t)$ wordt

$$\frac{dq}{dt} = -q + 2q(1-q) + q^2 = q - q^2$$

ofwel

$$\frac{dq}{dt} = q(1-q)$$

met de beginvoorwaarde $q(0) = \frac{1}{2}$. Dit is een autonome differentiaalvergelijking, dus met de scheiding van variabelen

$$\int_0^t ds \;=\; \int_{1/2}^q \frac{dx}{x(1-x)}.$$

Merk op dat $0 < q(t) < 1$ voor alle $t \in \mathbb{R}$ en dus $0 < x < 1$. Verder geldt met de breuksplitsing

$$\begin{aligned}
\int_{1/2}^q \frac{dx}{x(1-x)} &= \int_{1/2}^q \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) dx \\
&= \int_{1/2}^q \frac{dx}{x} + \int_{1/2}^q \frac{dx}{1-x} \;=\; [\ln x]_{1/2}^q - [\ln(1-x)]_{1/2}^q \\
&= \ln q + \ln 2 - \ln(1-q) - \ln 2 \;=\; \ln\left(\frac{q}{1-q}\right).
\end{aligned}$$

Dus

$$t \;=\; \ln\left(\frac{q}{1-q}\right) \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{e}^t \;=\; \frac{q}{1-q}$$

en uiteindelijk

$$q(t) \;=\; \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}, \quad p(t) \;=\; 4q(t)(1-q(t)) \;=\; \frac{4\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}.$$

Opgave 4 [20pt] Beschouw de volgende differentiaalvergelijking

$$x^3y''' + 6x^2y'' + 7xy' + y = 0, \quad x > 0. \tag{5}$$

(a) [5 pt] Introduceer de differentiaaloperator $(Ly)(x) := x^3y'''(x) + 6x^2y'' + 7xy'(x) + y(x)$ en laat zien dat

$$L(x^r) = f(r)x^r, \tag{6}$$

waarin $f(r)$ een polynoom van graad 3 is.

We hebben

$$L(x^r) \;=\; x^3r(r-1)(r-2)x^{r-3} + 6x^2r(r-1)x^{r-2} + 7xrx^{r-1} + x^r \;=\; (r^3+3r^2+3r+1)x^r,$$

zodat $f(r) = r^3 + 3r^2 + 3r + 1$, een polynoom van graad 3.

(b) [10 pt] Bewijs dat f één nulpunt heeft met multipliciteit drie. Vind drie lineair-onafhankelijke oplossingen van $Ly = 0$ (*Hint*: Bereken de eerste en de tweede afgeleiden van (6) naar r.)

Er geldt $f(r) = (r+1)^3$. Per definitie heeft het nulpunt $r_1 = -1$ van f dus multipliciteit $m_1 = 3$. Er zijn geen andere nulpunten, dus is $y_1(x) = \dfrac{1}{x}$ een oplossing van $Ly = 0$. De eerste en tweede afgeleiden van (6) naar r geven

$$\begin{aligned} L\left(\frac{\partial}{\partial r}x^r\right) &= 3(r+1)^2x^r + (r+1)^3x^r\ln x, \\ L\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}x^r\right) &= 6(r+1)x^r + 6(r+1)^2x^r\ln x + (r+1)^3x^r(\ln x)^2, \end{aligned}$$

omdat

$$\frac{\partial^k}{\partial r^k}x^r = \frac{\partial^k}{\partial r^k}e^{r\ln x} = x^r(\ln x)^k.$$

Dus zijn

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \left.\frac{\partial}{\partial r}x^r\right|_{r=-1} = \frac{\ln x}{x}, \\ y_3(x) &= \left.\frac{\partial^2}{\partial r^2}x^r\right|_{r=-1} = \frac{(\ln x)^2}{x}, \end{aligned}$$

twee andere oplossingen van $Ly = 0$.

De Wronski-determinant van de oplossingen

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{x} & \dfrac{\ln x}{x} & \dfrac{(\ln x)^2}{x} \\ -\dfrac{1}{x^2} & \dfrac{1-\ln x}{x^2} & \dfrac{(2-\ln x)\ln x}{x^2} \\ \dfrac{2}{x^3} & \dfrac{-3+2\ln x}{x^3} & \dfrac{2-6\ln x+2(\ln x)^2)}{x^3} \end{vmatrix}$$

is in het punt $x = 1$ gelijk aan

$$w(1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Omdat $w(1) \neq 0$ zijn de gevonden oplossingen lineair-onafhankelijk op $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

(c) [5 pt] Schrijf de algemene oplossing van $Ly = 0$ voor $x > 0$ en vind de oplossing van (5) die voldoet aan de randvoorwaarden $y(1) = 1,\ y'(1) = 0,\ y(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^{-1}$.

De algemene oplossing van $Ly = 0$ op $\mathbb{R}_+$ is dus

$$y(x) = \frac{A}{x} + \frac{B\ln x}{x} + \frac{C(\ln x)^2}{x}$$

met $A, B, C \in \mathbb{R}$. We hebben

$$y'(x) = \frac{-A + B + (-B + 2C)\ln x - C(\ln x)^2}{x^2}\ .$$

De randvoorwaarden zijn equivalent met het stelsel

$$\begin{cases} A & = & 1, \\ -A + B & = & 0, \\ A + B + C & = & 1, \end{cases}$$

waaruit volgt $A = B = 1, C = -1$. De oplossing van (5) die voldoet aan de gegeven randvoorwaarden is

$$y(x) = \frac{1 + \ln x - (\ln x)^2}{x}.$$