Tentamen Differentiaalvergelijkingen (WISB231), 9 april 2020, 13:30-16:30

Dit 'open book' tentamen bestaat uit vier opgaven. Motiveer uw antwoorden. Succes!
Onderteken de volgende verklaring en retourneer tegelijk met je uitwerking:

Hierbij verklaar ik dat ik de uitwerkingen van dit tentamen zelf heb gemaakt, zonder hulp van andere personen of van andere hulpmiddelen dan het cursusmateriaal en mijn eigen aantekeningen.

Naam/Voornaam/Handtekening

Opgave 1 [15 pt] Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) [5 pt] Vind $\det(e^{xA})$.

(b) [10 pt] Bereken e^{xA}.

Opgave 2 [25 pt] Beschouw het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (1 - x^2 - y^2)y - x. \end{cases} \tag{2}$$

(a) [5 pt] Bepaal alle rustpunten van (2).

(b) [10 pt] Maak de transformatie naar poolcoördinaten $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$. Laat zien dat het stelsel (2) onder deze transformatie overgaat in het volgende stelsel:

$$\begin{cases} \dot{r} &= r(1 - r^2)\sin^2\varphi, \\ \dot{\varphi} &= -1 + (1 - r^2)\sin\varphi\cos\varphi. \end{cases}$$

(c) [5 pt] Laat zien dat (2) één periodieke baan heeft en vind de bijbehorende periodieke oplossing. Bepaal tevens de periode van deze oplossing.

(d) [5 pt] Schets het faseplaatje behorend bij (2) in het (x, y)-vlak. Zet ook pijltjes!

Z.O.Z.

Opgave 3 [40 pt] Beschouw het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \dot{q} &= -q + \frac{1}{2}p + q^2, \\ \dot{p} &= p - 2qp. \end{cases} \tag{3}$$

(a) [5 pt] Bepaal alle rustpunten van (3) in het (q, p)-vlak.

(b) [5 pt] Bewijs dat (3) herschreven kan worden als een Hamilton-stelsel

$$\begin{cases} \dot{q} &= \dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p}, \\ \dot{p} &= -\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial q}, \end{cases}$$

en vind de Hamiltonfunctie $H = H(q, p)$ zo dat $H(0, 0) = 0$.

(c) [5 pt] Laat zien dat de verzamelingen $L = \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : p = 0\}$ en $S = \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : p = 4q(1 - q)\}$ invariant zijn voor (3), d.w.z. bestaan uit de banen van (3).

(d) [10 pt] Bepaal de types van alle rustpunten van (3), in het bijzonder hun stabiliteit.

(e) [10 pt] Schets het faseplaatje behorend bij (3) in het (q, p)-vlak. Let op de rustpunten en andere speciale banen. Zet ook pijltjes!

(f) [5 pt] Bereken de oplossing $(q(t), p(t))$ van (3) met $(q(0), p(0)) = (\frac{1}{2}, 1)$.

Hints: De bijbehorende baan bevindt zich in S. Zet dan $p = 4q(1 - q)$ in de eerste differentiaalvergelijking van (3) en los die op.

Opgave 4 [20pt] Beschouw de volgende differentiaalvergelijking

$$x^3y''' + 6x^2y'' + 7xy' + y = 0, \quad x > 0. \tag{4}$$

(a) [5 pt] Introduceer de differentiaaloperator $(Ly)(x) := x^3y'''(x) + 6x^2y'' + 7xy'(x) + y(x)$ en laat zien dat

$$L(x^r) = f(r)x^r, \tag{5}$$

waarin $f(r)$ een polynoom van graad 3 is.

(b) [10 pt] Bewijs dat f één nulpunt heeft met multipliciteit drie. Vind drie lineair-onafhankelijke oplossingen van $Ly = 0$ (*Hint*: Bereken de eerste en de tweede afgeleiden van (5) naar r.)

(c) [5 pt] Schrijf de algemene oplossing van $Ly = 0$ voor $x > 0$ en vind de oplossing van (4) die voldoet aan de randvoorwaarden $y(1) = 1,\ y'(1) = 0,\ y(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^{-1}$.