Hertentamen Differentiaalvergelijkingen (WISB231), 2 juli 2020, 13:30-16:30

Dit 'open book' tentamen bestaat uit vier opgaven. Motiveer uw antwoorden. Succes!
Onderteken de volgende verklaring en retourneer tegelijk met je uitwerking:

Hierbij verklaar ik dat ik de uitwerkingen van dit hertentamen zelf heb gemaakt, zonder hulp van andere personen of van andere hulpmiddelen dan het cursusmateriaal en mijn eigen aantekeningen.

Naam/Voornaam/Handtekening

Opgave 1 [20 pt] Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) [5 pt] Vind $\det(e^{xA})$.

(b) [15 pt] Bereken e^{xA}.

Opgave 2 [20 pt] Beschouw op $[0, 1]$ het randwaardeprobleem

$$y'''(x) + 3y''(x) + 3y'(x) + y(x) = \sin(\pi x), \quad y(0) = y'(0) = y(1) = 0. \tag{2}$$

(a) [20 pt] Bewijs dat (2) precies één oplossing heeft.

(b) **Bonus** [20 pt] Vind deze oplossing.

Opgave 3 [40 pt] Beschouw het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= q - 3q^2 + 2q^3. \end{cases} \tag{3}$$

(a) [5 pt] Bepaal alle rustpunten van (3) in het (q, p)-vlak.

(b) [5 pt] Bewijs dat (3) herschreven kan worden als een Hamilton-stelsel

$$\begin{cases} \dot{q} &= \dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p}, \\ \dot{p} &= -\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial q}, \end{cases}$$

en vind de Hamiltonfunctie $H = H(q, p)$ zo dat $H(0, 0) = 0$.

Z.O.Z.

(c) [10 pt] Laat zien dat de verzamelingen

$$T = \{(q,p) \in \mathbb{R}^2 : p = q(1-q)\} \quad \text{en} \quad B = \{(q,p) \in \mathbb{R}^2 : p = q(q-1)\}$$

invariant zijn voor (3), d.w.z. bestaan uit de banen van (3).

(d) [10 pt] Bepaal de types van alle rustpunten van (3), in het bijzonder hun stabiliteit.

(e) [10 pt] Schets het faseplaatje behorend bij (3) in het (q,p)-vlak. Let op de rustpunten en andere speciale banen. Zet ook pijltjes!

Opgave 4 [20 pt] Zij $y(x)$ een oplossing van het beginwaardeprobleem voor de Bernoulli-vergelijking

$$y' = y^2 - x, \quad y(0) = 1.$$

Vind a_n voor $n \leq 5$ in de reeksontwikkeling $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.