TENTAMEN VOOR GROEPEN, MODULEN EN VOORSTELLINGEN
3 NOVEMBER 2020, 9.00-12.00

TENTAMENVRAGEN (NEDERLANDS)

Vraag 1 (10 punten): Bewijs dat een groep van kardinaliteit 2020 niet simpel is.

Antwoord: De priemontbinding van 2020 is $2^2 \cdot 5 \cdot 101$. De derde Sylowstelling toepasen op $p = 101$ en $m = 2^2 \cdot 5 = 20$ geeft

$$n_{101} \equiv 1 \pmod{101}$$
$$n_{101} | 20.$$

Hieruit volgt dat $n_{101} = 1$, dus er is een unieke 101-Sylowgroep. Zo'n unieke Sylowgroep is normaal, waaruit volgt dat de groep niet simpel is.

Vraag 2: Bekijk de dihedrale groep D_{12} van kardinaliteit 12. Je mag gebruiken dat

$$D_{12} = \langle r, s : r^6 = 1 = s^2, srs^{-1} = r^{-1} \rangle$$

en dat de conjugatieklassen er als volgt uitzien:

$$\{1\}, \qquad \{r, r^5\}, \qquad \{r^2, r^4\}, \qquad \{r^3\}, \qquad \{s, sr^2, sr^4\}, \qquad \{sr, sr^3, sr^5\}.$$

Vraag 2a (4 punten): Verifieer de klassenformule voor D_{12}.

Antwoord: Aangezien elementen in het centrum een triviale conjugatieklasse hebben, zien we dat $Z(G) = \{1, r^3\}$ dus $|Z(G)| = 2$. Voor de overige conjugatieklassen kunnen we de getallen $[G : C_G(a_i)] = |\mathscr{C}(a_i)|$ aflezen aan de gegeven informatie:

$$[G : C_G(r)] = 2$$
$$[G : C_G(r^2)] = 2$$
$$[G : C_G(s)] = 3$$
$$[G : C_G(sr)] = 3$$

dus in totaal geldt

$$12 = |G| = |Z(G)| + \sum [G : C_G(a_i)] = 2 + 2 + 2 + 3 + 3 = 12.$$

Vraag 2b (6 punten): Laat zien dat de afbeelding

$$\begin{aligned}\phi : D_{12} &\to \mathbb{C}^\times\\ r &\mapsto 1\\ s &\mapsto -1\end{aligned}$$

een ééndimensionale voorstelling van D_{12} geeft, en dat de afbeelding

$$\begin{aligned}\psi : D_{12} &\to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\\ r &\mapsto \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\\ s &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

een tweedimensionale voorstelling van D_{12} geeft.

Antwoord: We checken dat

$$\phi(r^6) = \phi(r)^6 = 1^6 = 1, \qquad \phi(s^2) = \phi(s)^2 = (-1)^2 = 1,$$
$$\phi(srs^{-1}) = \phi(s)\phi(r)\phi(s^{-1}) = -1 \cdot 1 \cdot -1 = 1,$$

en dat

$$\psi(r^6) = \psi(r)^6 = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\psi(s^2) = \psi(s)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\psi(srs^{-1}) = \psi(s)\psi(r)\psi(s^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dat wil zeggen dat ϕ en ψ voorstellingen definiëren: de dimensie is duidelijk.

Vraag 2c (8 punten): Wat zijn de karakters van ϕ en ψ? (Bereken de waarden op alle conjugatieklassen.) Bewijs dat de karakters orthogonaal zijn en dat ψ irreducibel is.

Antwoord: We rekenen uit dat

$$\chi_\phi(1) = 1, \chi_\phi(r) = 1, \chi_\phi(r^2) = 1, \chi_\phi(r^3) = 1, \chi_\phi(s) = -1, \chi_\phi(sr) = -1$$

en

$$\chi_\psi(1) = 2, \chi_\psi(r) = 1, \chi_\psi(r^2) = -1, \chi_\psi(r^3) = -2, \chi_\psi(s) = 0, \chi_\psi(sr) = 0.$$

Hieruit volgt dat

$$\langle \chi_\phi, \chi_\psi \rangle = \frac{1}{12} \left(1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \cdot 0 \right) = 0$$

en dat

$$\langle \chi_\psi, \chi_\psi \rangle = \frac{1}{12} \left(1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) \cdot (-2) + 3 \cdot 0 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot 0 \right) = 1.$$

Vraag 2d (6 punten): Laat zien hoeveel inequivalente irreducibele voorstellingen D_{12} heeft over $\mathbb{C}$ en welke graden deze voorstellingen hebben. *(Hint: gebruik onderdeel 2b.)*

Antwoord: Het aantal irreducibele inequivalente irreducibele voorstellingen is gelijk aan het aantal conjugatieklassen, dus dat is zes. We hebben er al twee gevonden: ϕ van graad $n_1 = 1$

en ψ van graad $n_2 = 2$. Ook hebben we altijd de triviale voorstelling van graad $n_3 = 1$. Voor de andere drie voorstellingen, met graden n_4, n_5, n_6 moet gelden dat

$$1 + 4 + 1 + n_4^2 + n_5^2 + n_6^2 = 12.$$

De enige mogelijkheid is nu dat $n_4 = 1, n_5 = 1, n_6 = 2$ (of een permutatie hiervan).

Vraag 3 (12 punten): Wat zijn de invariante factoren van de volgende matrix over $\mathbb{C}[x]$?

$$A = \begin{pmatrix} x^2+2x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2+3x+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^3+2x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^4+x^3 \end{pmatrix}$$

Antwoord: We lezen dat de elementaire divisoren als volgt zijn:

$$x^2+2x = x(x+2), \qquad x^2+3x+2 = (x+1)(x+2), \qquad x^3+2x^2 = x^2(x+2), \qquad x^4+x^3 = x^3(x+1).$$

Als we deze divisoren groeperen per eigenwaarde, met oplopende machten, krijgen we

$$\begin{bmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & (x+1) & (x+1) \\ (x+2) & (x+2) & (x+2) \end{bmatrix}$$

De invariante factoren vinden we nu door de kolommen te vermenigvuldigen: zo vinden we

$$x(x+2), \qquad x^2(x+1)(x+2), \qquad x^3(x+1)(x+2).$$

Vraag 4: Zij A een $\mathbb{Z}$-moduul, zij $a \in A$ een willekeurig element, en zij $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ een geheel getal. Voor een geheel getal $k \in \mathbb{Z}$ schrijven we $\bar{k}$ voor zijn beeld in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Vraag 4a (10 punten): Laat zien dat de afbeelding

$$f_a : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to A$$
$$\bar{k} \mapsto ka$$

een welgedefinieerd $\mathbb{Z}$-moduulhomomorfisme is dan en slechts dan als $na = 0$.

Antwoord: De afbeelding is een $\mathbb{Z}$-moduulhomomorfisme dan en slechts dan als

$$f_a(\bar{k}_1 + \bar{k}_2) = (k_1 + k_2)a = k_1 a + k_2 a = f_a(\bar{k}_1) + f_a(\bar{k}_2)$$

voor alle $\bar{k}_1, \bar{k}_2 \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, en

$$f_a(m\bar{k}) = m f_a(\bar{k})$$

voor alle $m \in \mathbb{Z}$. In het bijzonder is dit homomorfisme volledig bepaald door waar de voortbrenger $\bar{1} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ naartoe gestuurd wordt, maar $f_a(\bar{1}) = a$. Omdat $n\bar{1} = 0$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, moet gelden dat $0 = f_a(n\bar{1}) = na$.
Merk op dat $\bar{k} = \bar{k}'$ dan en slechts dan als $k = k' + mn$ voor alle $m \in \mathbb{Z}$.Voor welgedefinieerdheid moeten we hebben dat $f_a(\bar{k}) = f_a(\bar{k}')$, dat wil zeggen, dat

$$ka = f_a(\bar{k}) = f_a(\bar{k}') = f_a(k + \bar{mn}) = (k + mn)a = ka + m(na)$$

voor alle $m \in \mathbb{Z}$. Dit geldt dan en slechts dan als $na = 0$.

Vraag 4b (10 punten): Bewijs dat er een $\mathbb{Z}$-moduulisomorfisme bestaat:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, A) \simeq \{a \in A : na = 0\}.$$

Antwoord: Merk op dat iedere $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, A)$ van de vorm f_a is als in Vraag 4a: immers, ieder homomorfisme wordt bepaald door waar het $\bar{1}$ heen stuurt. Stel dat $f(\bar{1}) = a \in A$. De eigenschappen van moduulhomomorfismen geven dan dat

$$f(\bar{k}) = f(\bar{1} + \ldots + \bar{1}) = f(k\bar{1}) = kf(\bar{1}) = ka,$$

zodat $f = f_a$. Definieer de afbeelding

$$\begin{aligned} \phi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, A) &\to \{a \in A : na = 0\} \\ f(= f_a) &\mapsto f(\bar{1})(= a). \end{aligned}$$

Dankzij Vraag 4a weten we dat $na = 0$, dus deze afbeelding heeft het juiste domein en bereik. Het is een moduulhomomorfisme omdat geldt dat

$$\phi(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)(\bar{1}) = f_1(\bar{1}) + f_2(\bar{1}) = \phi(f_1) + \phi(f_2)$$

voor alle $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, A)$ en

$$\phi(mf) = (mf)(\bar{1}) = m(f(\bar{1})) = m\phi(f)$$

voor alle $m \in \mathbb{Z}$ en alle $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, A)$. Dit homomorfisme is surjectief omdat we het element $f_a \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, A)$ kunnen opschrijven voor iedere $a \in A$ zodat $na = 0$ (dankzij Vraag 4a). Het is ook injectief: als $f(\bar{1}) = 0$, dan geldt dat $f(\bar{k}) = 0$ voor alle $\bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, dus $f = 0$ is het triviale homomorfisme.

Vraag 5a (9 punten): Bekijk $\mathbb{Q}$ als een $\mathbb{Z}$-moduul. Bewijs of weerleg de volgende uitspraken.

(1) $\mathbb{Q}$ is torsievrij.
(2) $\mathbb{Q}$ is vrij.
(3) $\mathbb{Q}$ is eindig voortgebracht.

Antwoord:

(1) Voor ieder element $q = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ geldt dat als $nq = \frac{nr}{s} = 0$ voor een $n \in \mathbb{Z}$ met $n \neq 0$, dan is $nr = 0$ (dus $r = 0$) dus $q = 0$. Dus $\mathbb{Q}$ is torsievrij.

(2) Stel dat $\mathbb{Q}$ vrij is. Dan heeft het een basis van elementen $q_i \in \mathbb{Q}$, waarin ieder element op een unieke manier kan worden uitgedrukt als $\mathbb{Z}$-lineaire combinatie. In het bijzonder moeten deze basiselementen $\mathbb{Z}$-lineair onafhankelijk van elkaar zijn. Maar voor iedere twee elementen $q_1 = \frac{a}{b}, q_2 = \frac{c}{d}$ in deze basis geldt dat

$$(bc) \cdot \frac{a}{b} + (-ad)\frac{c}{d} = ac - ac = 0$$

een $\mathbb{Z}$-lineaire afhankelijkheid geeft. De enige mogelijkheid is dus dat er een uniek basiselement $e \in \mathbb{Q}$ is, maar dan is er een isomorfisme $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}e \simeq \mathbb{Z}$. Dit is een tegenspraak; dus $\mathbb{Q}$ is niet vrij.

(3) Stel dat $\mathbb{Q}$ eindig voortgebracht is door een eindige verzameling $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$. De breuken q_i hebben eindig veel priemfactoren in hun noemers. Er zijn oneindig veel priemgetallen, dus er is een priem p zodat $\frac{1}{p} \in \mathbb{Q}$ niet opgespannen kan worden over $\mathbb{Z}$ door deze eindige verzameling. Dit is een tegenspraak; dus $\mathbb{Q}$ is niet eindig voortgebracht.

Vraag 5b (9 punten): Bewijs of weerleg dezelfde drie uitspraken voor $\mathbb{Q}$ als $\mathbb{Q}$-moduul.
Antwoord:

(1) Voor ieder element $q = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ geldt: als er een $(0 \neq)p = \frac{t}{u} \in \mathbb{Q}$ bestaat zodat $pq = \frac{tr}{us} = 0$, dan is $tr = 0$ (dus $r = 0$) dus $q = 0$. Dus $\mathbb{Q}$ is nog steeds torsievrij.
(2) Het moduul is gelijk aan de ring in dit geval, dus $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{\oplus 1}$ is vrij.
(3) We kunnen een wilekeurig niet-nul element $a \in \mathbb{Q}$ (bijvoorbeeld $a = 1$) als voortbrenger kiezen, zodat $\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \cdot a$ eindig voortgebracht (en zelfs cyclisch) is.

Vraag 6: Zij R een commutatieve ring met 1 en zij M, N twee R-modulen.

Vraag 6a (8 punten): Bewijs de uitspraak: als M en N vrije modulen zijn, dan is $M \otimes_R N$ ook vrij.
(Hint: gebruik dat tensorproducten commuteren met directe sommen.)

Antwoord: Als M en N vrij zijn, dan geldt

$$M \simeq R^{\oplus m}, \qquad N \simeq R^{\oplus n},$$

waarbij m de rang is van M en n de rang is van N. Er volgt, gebruikmakend van de hint, dat

$$M \otimes_R N \simeq R^{\oplus m} \otimes_R R^{\oplus n} = (R \otimes_R R) \oplus (R \otimes R) \oplus \ldots \oplus (R \otimes R)$$

waarbij we mn termen van de vorm $R \otimes_R R$ bij elkaar optellen. Maar

$$R \otimes_R R = R,$$

dus

$$M \otimes_R N \simeq R^{\oplus(mn)}$$

is ook een vrij moduul.

Vraag 6b (8 punten): Gebruik Vraag 6a om te bewijzen: als M en N projectieve modulen zijn, dan is $M \otimes_R N$ ook projectief.

Antwoord: Een projectief moduul is een summand van een vrij moduul. Dat wil zeggen dat er vrije modulen $R^{\oplus m}$ en $R^{\oplus n}$ bestaan en (projectieve) modulen M' en N' zodat

$$M \oplus M' = R^{\oplus m} \qquad \text{en} \qquad N \oplus N' = R^{\oplus n}.$$

We zien dan, weer gebruikmakend van dezelfde hint, dat

$$\begin{aligned}
(M \otimes_R N) \oplus ((M \otimes_R N') &\oplus (M' \otimes_R N) \oplus (M' \otimes_R N')) \\
&= (M \otimes_R (N \oplus N')) \oplus (M' \otimes_R (N \oplus N')) \\
&= (M \otimes_R R^{\oplus n}) \oplus (M' \otimes_R R^{\oplus n}) \\
&= (M \oplus M') \otimes_R R^{\oplus n} \\
&= R^{\oplus m} \otimes_R R^{\oplus n} = R^{\oplus(nm)},
\end{aligned}$$

waar de laatste regel volgt uit Vraag 6a. Dit laat zien dat $M \otimes_R N$ ook een summand van een vrij moduul – namelijk $R^{\oplus(nm)}$ – is, en dus projectief is.