TENTAMEN VOOR GROEPEN, MODULEN EN VOORSTELLINGEN
3 NOVEMBER 2020, 9.00-12.00

INSTRUCTIES

Het “Protocol online tentamens Wiskunde” is van toepassing.

Hoe werkt inleveren?

- Er zijn 6 tentamenvragen. Lever de uitwerking 6 keer in via “Assignments" in Blackboard: Er zijn 6 inleverpagina’s, in principe één per tentamenvraag, maar je mag ook de uitwerking van het volledige tentamen 6 keer inleveren. Je kunt ingeleverd werk zo vaak opnieuw indienen als je wilt, tot de deadline.
- De deadline voor online inleveren is **dinsdag 3 november, 12.40** (dit is inclusief 40 minuten extra tijd voor inscannen en uploaden). Werk dat te laat wordt ingeleverd zal niet worden bekeken.
- Studenten met recht op extra tijd kunnen ook na de deadline inleveren tot de hun toegekende extra tijd is opgebruikt; volgens protocol is dat tot 13.10 (inclusief 40 minuten extra tijd voor inscannen en uploaden).

Wat moet ik inleveren?

- Je mag een getypte tekst (pdf) of duidelijk leesbare scan inleveren. De naam van het bestand heeft de vorm <achternaam><voornaam><studentnummer>.pdf en de uitwerking bevat je naam en studentnummer. Je mag in het Nederlands of Engels antwoorden. Van de tentamenvragen is hieronder een Nederlandse en Engelse versie beschikbaar.
- Bij je uitwerkingen moet één keer de ondertekende verklaring zitten die op de volgende bladzijde staat (je mag die ook met de hand overschrijven en dan ondertekenen).
- Voor dit tentamen zijn de toegestane hulpmiddelen: het cursusboek, eigen aantekeningen, streams en pdf-documenten van hoorcolleges en materiaal op de Blackboardpagina van het vak. Je mag (voor jezelf) met rekenmachine of computer (online calculator of computeralgebrapaketten) dingen narekenen, maar de output van een dergelijke berekening overnemen zonder uitleg telt niet als correct antwoord.
- Er mag niet worden overlegd met anderen, ook niet digitaal. In het bijzonder is het verboden tentamenvragen te posten op online fora. Plagiaat, ook uit digitale bronnen, wordt niet getolereerd. Vermoedens van fraude worden gemeld aan de examencommissie. Ook het verstrekken van antwoorden maakt je medeplichtig aan fraude en wordt dus gemeld aan de examencommissie.
- Schrijf helder maar bondig. Geef niet enkel het antwoord, maar ook de motivatie. Antwoorden zonder uitleg leveren geen punten op.

Communicatie tijdens en na het tentamen

- Eventuele mededelingen van de docent tijdens het tentamen zullen op Blackboard en in het algemene Teamskanaal worden gepost.
- Heb je een vraag over het tentamen, bijvoorbeeld over een opgave? Werkt je internet niet of ben je in paniek? Je kunt tijdens het tentamen een email sturen naar V.Z.Karemaker@uu.nl.
- Direct na afloop (tussen 12.40 en 13.10) wordt een steekproefsgewijze ID-controle gehouden. Ook kun je binnen 10 werkdagen na het tentamen gevraagd worden om een toelichting, ook als er geen vermoeden is van fraude.

VERKLARING

Dinsdag 3 november 2020

Hierbij verklaar ik dat ik de uitwerkingen van dit tentamen zelf heb gemaakt, zonder hulp van andere personen of van andere hulpmiddelen dan beschreven op het tentamenblad.

Naam: ______________________________

Studentnummer: ______________________________

Handtekening: ______________________________

TENTAMENVRAGEN (NEDERLANDS)

Vraag 1 (10 punten): Bewijs dat een groep van kardinaliteit 2020 niet simpel is.

Vraag 2: Bekijk de dihedrale groep D_{12} van kardinaliteit 12. Je mag gebruiken dat

$$D_{12} = \langle r, s : r^6 = 1 = s^2, srs^{-1} = r^{-1} \rangle$$

en dat de conjugatieklassen er als volgt uitzien:

$$\{1\}, \qquad \{r, r^5\}, \qquad \{r^2, r^4\}, \qquad \{r^3\}, \qquad \{s, sr^2, sr^4\}, \qquad \{sr, sr^3, sr^5\}.$$

Vraag 2a (4 punten): Verifieer de klassenformule voor D_{12}.

Vraag 2b (6 punten): Laat zien dat de afbeelding

$$\begin{aligned} \phi : D_{12} &\to \mathbb{C}^\times \\ r &\mapsto 1 \\ s &\mapsto -1 \end{aligned}$$

een ééndimensionale voorstelling van D_{12} geeft, en dat de afbeelding

$$\begin{aligned} \psi : D_{12} &\to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \\ r &\mapsto \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\ s &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

een tweedimensionale voorstelling van D_{12} geeft.

Vraag 2c (8 punten): Wat zijn de karakters van ϕ en ψ? (Bereken de waarden op alle conjugatieklassen.) Bewijs dat de karakters orthogonaal zijn en dat ψ irreducibel is.

Vraag 2d (6 punten): Laat zien hoeveel inequivalente irreducibele voorstellingen D_{12} heeft over $\mathbb{C}$ en welke graden deze voorstellingen hebben. *(Hint: gebruik onderdeel 2b.)*

Vraag 3 (12 punten): Wat zijn de invariante factoren van de volgende matrix over $\mathbb{C}[x]$?

$$A = \begin{pmatrix} x^2+2x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2+3x+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^3+2x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^4+x^3 \end{pmatrix}$$

Vraag 4: Zij A een $\mathbb{Z}$-moduul, zij $a \in A$ een willekeurig element, en zij $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ een geheel getal. Voor een geheel getal $k \in \mathbb{Z}$ schrijven we $\bar{k}$ voor zijn beeld in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Vraag 4a (10 punten): Laat zien dat de afbeelding

$$\begin{aligned} f_a : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\to A \\ \bar{k} &\mapsto ka \end{aligned}$$

een welgedefinieerd $\mathbb{Z}$-moduulhomomorfisme is dan en slechts dan als $na = 0$.

Vraag 4b (10 punten): Bewijs dat er een $\mathbb{Z}$-moduulisomorfisme bestaat:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, A) \simeq \{a \in A : na = 0\}.$$

Vraag 5a (9 punten): Bekijk $\mathbb{Q}$ als een $\mathbb{Z}$-moduul. Bewijs of weerleg de volgende uitspraken.

(1) $\mathbb{Q}$ is torsievrij.
(2) $\mathbb{Q}$ is vrij.
(3) $\mathbb{Q}$ is eindig voortgebracht.

Vraag 5b (9 punten): Bewijs of weerleg dezelfde drie uitspraken voor $\mathbb{Q}$ als $\mathbb{Q}$-moduul.

Vraag 6: Zij R een commutatieve ring met 1 en zij M, N twee R-modulen.

Vraag 6a (8 punten): Bewijs de uitspraak: als M en N vrije modulen zijn, dan is $M \otimes_R N$ ook vrij.
(Hint: gebruik dat tensorproducten commuteren met directe sommen.)

Vraag 6b (8 punten): Gebruik Vraag 6a om te bewijzen: als M en N projectieve modulen zijn, dan is $M \otimes_R N$ ook projectief.

EINDE VAN HET TENTAMEN

EXAM QUESTIONS (ENGLISH)

Question 1 (10 points): Prove that a group of order 2020 is not simple.

Question 2: Consider the dihedral group D_{12} of order 12. You may use that

$$D_{12} = \langle r, s : r^6 = 1 = s^2, srs^{-1} = r^{-1} \rangle$$

and that the conjugacy classes are as follows:

$$\{1\}, \quad \{r, r^5\}, \quad \{r^2, r^4\}, \quad \{r^3\}, \quad \{s, sr^2, sr^4\}, \quad \{sr, sr^3, sr^5\}.$$

Question 2a (4 points): Verify the class formula for D_{12}.

Question 2b (6 points): Show that the map

$$\begin{aligned} \phi : D_{12} &\to \mathbb{C}^\times \\ r &\mapsto 1 \\ s &\mapsto -1 \end{aligned}$$

gives a one-dimensional representation of D_{12}, and that the map

$$\begin{aligned} \psi : D_{12} &\to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \\ r &\mapsto \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\ s &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

gives a two-dimensional representation of D_{12}.

Question 2c (8 points): What are the characters of ϕ and ψ? (Compute the values on all conjugacy classes.) Prove that the characters are orthogonal and that ψ is irreducible.

Question 2d (6 points): Determine how many inequivalent irreducible representations D_{12} has over $\mathbb{C}$ and determine their respective degrees. *(Hint: use question 2b.)*

Question 3 (12 points): What are the invariant factors of the following matrix over $\mathbb{C}[x]$?

$$A = \begin{pmatrix} x^2+2x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2+3x+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^3+2x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^4+x^3 \end{pmatrix}$$

Question 4: Let A be a $\mathbb{Z}$-module, let $a \in A$ be any element, and let $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ be a natural number. For an integer $k \in \mathbb{Z}$ we denote by $\bar{k}$ its image in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Question 4a (10 points): Show that the map

$$f_a : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to A$$
$$\bar{k} \mapsto ka$$

is a well-defined $\mathbb{Z}$-module homomorphism if and only if $na = 0$.

Question 4b (10 points): Prove that there exists a $\mathbb{Z}$-module isomorphism:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, A) \simeq \{a \in A : na = 0\}.$$

Question 5a (9 points): Consider $\mathbb{Q}$ as a $\mathbb{Z}$-module. Prove or disprove the following statements.

(1) $\mathbb{Q}$ is torsion-free.
(2) $\mathbb{Q}$ is free.
(3) $\mathbb{Q}$ is finitely generated.

Question 5b (9 points): Prove or disprove the same three statements for $\mathbb{Q}$ as a $\mathbb{Q}$-module.

Question 6: Let R be a commutative ring with 1 and let M, N be two R-modules.

Question 6a (8 points): Prove the statement: if M and N are free modules, then $M \otimes_R N$ is also free.
(Hint: use that tensor products commute with direct sums.)

Question 6b (8 points): Use Question 6a to prove: if M and N are projective modules, then $M \otimes_R N$ is also projective.

END OF THE EXAM