HERTENTAMEN VOOR GROEPEN, MODULEN EN VOORSTELLINGEN
5 JANUARI 2021, 9.00-12.00

INSTRUCTIES

Het "Protocol online tentamens Wiskunde" is van toepassing.

Hoe werkt inleveren?

- Er zijn 6 tentamenvragen. Lever je volledige uitwerking in door deze per email naar `V.Z.Karemaker@uu.nl` te sturen.
- De deadline voor online inleveren is **dinsdag 5 januari, 12.40** (dit is inclusief 40 minuten extra tijd voor inscannen en uploaden). Werk dat te laat wordt ingeleverd zal niet worden bekeken.
- Studenten met recht op extra tijd kunnen ook na de deadline inleveren tot de hun toegekende extra tijd is opgebruikt; volgens protocol is dat tot 13.10 (inclusief 40 minuten extra tijd voor inscannen en uploaden).

Wat moet ik inleveren?

- Je mag een getypte tekst (pdf) of duidelijk leesbare scan inleveren. De naam van het bestand heeft de vorm <achternaam><voornaam><studentnummer>.pdf en de uitwerking bevat je naam en studentnummer. Je mag in het Nederlands of Engels antwoorden. Van de tentamenvragen is hieronder een Nederlandse en Engelse versie beschikbaar.
- Voeg aan je uitwerkingen de ondertekende verklaring toe die op de volgende bladzijde staat (je mag die ook met de hand overschrijven en dan ondertekenen).
- Voor dit tentamen zijn de toegestane hulpmiddelen: het cursusboek, eigen aantekeningen, streams en pdf-documenten van hoorcolleges en materiaal op de Blackboardpagina van het vak. Je mag (voor jezelf) met rekenmachine of computer (online calculator of computeralgebrapaketten) dingen narekenen, maar de output van een dergelijke berekening overnemen zonder uitleg telt niet als correct antwoord.
- Er mag niet worden overlegd met anderen, ook niet digitaal. In het bijzonder is het verboden tentamenvragen te posten op online fora. Plagiaat, ook uit digitale bronnen, wordt niet getolereerd. Vermoedens van fraude worden gemeld aan de examencommissie. Ook het verstrekken van antwoorden maakt je medeplichtig aan fraude en wordt dus gemeld aan de examencommissie.
- Schrijf helder maar bondig. Geef niet enkel het antwoord, maar ook de motivatie. Antwoorden zonder uitleg leveren geen punten op.

Communicatie tijdens en na het tentamen

- Eventuele mededelingen van de docent tijdens het hertentamen zullen per email worden gestuurd. Werkt je internet niet of ben je in paniek? Je kunt tijdens het hertentamen een email sturen naar `V.Z.Karemaker@uu.nl` of bellen op $06 - 29074203$.
- Direct na afloop (tussen 12.40 en 13.10) wordt een steekproefsgewijze ID-controle gehouden. Ook kun je binnen 10 werkdagen na het tentamen gevraagd worden om een toelichting, ook als er geen vermoeden is van fraude.

VERKLARING

Dinsdag 5 januari 2021

Hierbij verklaar ik dat ik de uitwerkingen van dit hertentamen zelf heb gemaakt, zonder hulp van andere personen of van andere hulpmiddelen dan beschreven op het tentamenblad.

Naam: ______________________________

Studentnummer: ______________________________

Handtekening: ______________________________

HERTENTAMENVRAGEN (NEDERLANDS)

Vraag 1 (10 punten): Bepaal of een groep van kardinaliteit 2021 simpel is.
(Hint: $2021 = 43 \cdot 47$.*)*

Vraag 2: Bekijk de permutatiegroep S_4 van kardinaliteit 24. Je mag gebruiken dat de conjugatieklassen gegeven worden door de cykeltypen en dus de volgende vertegenwoordigers hebben:

$$1, \qquad (12), \qquad (123), \qquad (1234), \qquad (12)(34).$$

Vraag 2a (4 punten): Verifieer de klassenformule voor S_4.

Vraag 2b (4 punten): Laat zien dat de tekenafbeelding

$$\Sigma : S_4 \to \mathbb{C}^\times$$
$$\sigma \mapsto \begin{cases} 1 & \text{als } \sigma \text{ even is} \\ -1 & \text{als } \sigma \text{ oneven is} \end{cases}$$

een ééndimensionale voorstelling van S_4 geeft.

Vraag 2c (4 punten): Wat is het karakter χ_Σ van Σ? (Bereken de waarden op alle conjugatieklassen.)

Vraag 2d (6 punten): Er bestaat een tweedimensionale voorstelling ϕ van S_4 wiens karakter χ_ϕ de volgende waarden aanneemt:

$$\chi_\phi(1) = 2, \quad \chi_\phi((12)) = 0, \quad \chi_\phi((123)) = -1, \quad \chi_\phi((1234)) = 0, \quad \chi_\phi((12)(34)) = 2.$$

Bewijs hiermee dat ϕ irreducibel is en dat χ_Σ and χ_ϕ orthogonaal zijn.

Vraag 2e (6 punten): Laat zien hoeveel inequivalente irreducibele voorstellingen S_4 heeft over $\mathbb{C}$ en welke graden deze voorstellingen hebben.

Vraag 3 (14 punten): Stel dat A een matrix is over $\mathbb{C}$ met karakteristiek polynoom

$$(x+1)^6(x-2)^3$$

en minimaalpolynoom

$$(x+1)^3(x-2)^2.$$

Schrijf alle mogelijke Jordannormaalvormen voor A op.

Vraag 4a (10 punten): Zij R een ring, M een R-moduul en $z \in Z(R)$ een element in het centrum van R. Laat zien dat de afbeelding

$$M \to M$$
$$m \mapsto zm$$

een welgedefinieerd R-moduulhomomorfisme is.

Vraag 4b (10 punten): Stel nu dat R commutatief is en zij $\iota : M \to M$ de identiteitsafbeelding op M. Bewijs dat de afbeelding

$$R \to \mathrm{End}_R(M)$$
$$r \mapsto r\iota$$

een welgedefinieerd R-moduulhomomorfisme is.

Vraag 5 (16 punten): Geef een voorbeeld voor elk van de volgende beschrijvingen, of bewijs dat zo'n voorbeeld niet bestaat.

(1) Een $\mathbb{Z}$-moduul dat torsievrij is maar niet vrij.
(2) Een eindig voortgebracht $\mathbb{Z}$-moduul dat vrij is maar niet torsievrij.
(3) Een $\mathbb{Z}$-moduul dat eindig voortgebracht is maar niet vrij.
(4) Een $\mathbb{Z}$-moduul dat vrij is maar niet eindig voortgebracht.

Vraag 6: Zij R een hoofdideaaldomein en kies $0 \neq r \in R$. Zij M een R-moduul.

Vraag 6a (4 punten): Bewijs dat de afbeelding

$$R \to R$$
$$x \mapsto rx$$

een injectief ringhomomorfisme is.

Vraag 6b (8 punten): Gebruik Vraag 6a om te bewijzen: als M plat is, dan is de afbeelding

$$M \to M$$
$$m \mapsto rm$$

een injectief R-moduulhomomorfisme.

Vraag 6c (4 punten): Concludeer uit Vraag 6b dat M torsievrij is.

EINDE VAN HET TENTAMEN

RETAKE EXAM QUESTIONS (ENGLISH)

Question 1 (10 points): Determine whether a group of order 2021 is simple.
(Hint: $2021 = 43 \cdot 47$.*)*

Question 2: Consider the symmetric group S_4 of order 24. You may use that the conjugacy classes are given by the cycle types and have the following representatives:

$$1, \qquad (12), \qquad (123), \qquad (1234), \qquad (12)(34).$$

Question 2a (4 points): Verify the class formula for S_4.

Question 2b (4 points): Show that the sign map

$$\Sigma : S_4 \to \mathbb{C}^\times$$
$$\sigma \mapsto \begin{cases} 1 & \text{if } \sigma \text{ is even} \\ -1 & \text{if } \sigma \text{ is odd} \end{cases}$$

gives a one-dimensional representation of S_4.

Question 2c (4 points): What is the character χ_Σ of Σ? (Compute the values on all conjugacy classes.)

Question 2d (6 points): There exists a two-dimensional representation ϕ of S_4 whose character χ_ϕ takes the following values:

$$\chi_\phi(1) = 2, \quad \chi_\phi((12)) = 0, \quad \chi_\phi((123)) = -1, \quad \chi_\phi((1234)) = 0, \quad \chi_\phi((12)(34)) = 2.$$

Use this to prove that ϕ is irreducible and that χ_Σ and χ_ϕ are orthogonal.

Question 2e (6 points): Determine how many inequivalent irreducible representations S_4 has over $\mathbb{C}$ and determine their respective degrees.

Question 3 (14 points): Suppose that A is a matrix over $\mathbb{C}$ with characteristic polynomial

$$(x+1)^6(x-2)^3$$

and minimal polynomial

$$(x+1)^3(x-2)^2.$$

Write down all possible Jordan normal forms for A.

Question 4a (10 points): Let R be a ring, M an R-module, and $z \in Z(R)$ an element of the centre of R. Show that the map

$$M \to M$$
$$m \mapsto zm$$

is a well-defined R-module homomorphism.

Question 4b (10 punten): Suppose now that R is commutative and let $\iota : M \to M$ be the identity map on M. Prove that the map

$$R \to \mathrm{End}_R(M)$$
$$r \mapsto r\iota$$

is a well-defined R-module homomorphism.

Question 5 (16 points): Give an example of each of the following descriptions, or prove that such an example does not exist.

(1) A $\mathbb{Z}$-module that is torsion-free but not free.
(2) A finitely generated $\mathbb{Z}$-module that is free but not torsion-free.
(3) A $\mathbb{Z}$-module that is finitely generated but not free.
(4) A $\mathbb{Z}$-module that is free but not finitely generated.

Question 6: Let R be a principal ideal domain and choose $0 \neq r \in R$. Let M be an R-module.

Question 6a (4 points): Prove that the map

$$R \to R$$
$$x \mapsto rx$$

is an injective ring homomorphism.

Question 6b (8 points): Use Question 6a to prove: if M is flat, then the map

$$M \to M$$
$$m \mapsto rm$$

is an injective R-module homomorphism.

Question 6c (4 points): Conclude from Question 6b that M is torsion-free.

END OF THE EXAM