F. Ziltener

2019/ 2020, blok 4
22 juni, 2020

Analyse in meer variabelen, WISB212

Tentamen

achternaam: __________________ voornaam: __________________

studentnummer: ____________________________________

Het tentamen duurt 180 minuten.

De cursusboeken van Duistermaat en Kolk en het dictaat over Analyse in meer variabelen mogen worden gebruikt. Andere hulpmiddelen alsmede het communiceren met andere personen zijn niet toegestaan.

28 punten zijn voldoende voor een cijfer 6.

Verklaring:

Hierbij verklaar ik dat ik de uitwerkingen bij dit tentamen zelf heb gemaakt zonder hulp van andere personen of van andere hulpmiddelen behalve de cursusboeken van Duistermaat en Kolk en het dictaat voor Analyse in meer variabelen.

datum:

naam en voornaam:

handtekening:

Voor verdere aanwijzingen z.o.z.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$
/4	/5	/4	/5	/9	/12	/7	/12	/9	/67

Aanwijzingen:

- Schrijf met een blauwe of zwarte pen, **niet** met een groene of rode pen, noch met een potlood.
- Druk het voorblad af, vul de gevraagde gegevens in, teken de verklaring en maak een foto of scan van het voorblad.
- Lever maar één oplossing voor elk probleem in.
- Schrijf je naam op elk vel.
- Schrijf niet te dicht bij de rand van een vel. (Bij scans wordt de rand vaak afgeschneden.)
- Maak één pdf-bestand van het ingevulde voorblad en je uitwerkingen.
- Noem dit bestand als volgt:

  tentamen_WISB212_achternaam_voornaam_studentnummer.pdf

  voorbeeld: tentamen_WISB212_Dirksen_Sjoerd_1234567.pdf
- Ga naar blackboard, 2019-2020 4 Analyse in meer variabelen (WISB212).
- Klik op Assessments op de linkerkant.
- Als je geen recht hebt op extra tijd klik dan op:
  tentamen over Analyse in meer variabelen, WISB212, 22 juni, 2020
- Als je recht hebt op extra tijd klik dan op:
  extra tijd, tentamen over Analyse in meer variabelen, WISB212, 22 juni, 2020
- Upload onder Attach Files je bestand.
- Druk op submit.
- Je hebt 20 minuten de tijd om je uitwerkingen na afloop van het tentamen in te leveren.

Tenzij anders aangegeven, mag je ieder resultaat ((hulp-)stelling, propositie of gevolg) gebruiken dat in het hoorcollege of in de cursusboeken is bewezen, zonder het opnieuw te bewijzen.

Tenzij anders aangegeven, mag je het volgende zonder bewijs gebruiken:

- Gladheid van een gegeven afbeelding als deze inderdaad glad is.
- De grafiek van een continue functie van een compacte deelverzameling van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ is verwaarloosbaar.

Bewijs elke andere uitspraak die je doet. Rechtvaardig je berekeningen. Ga na dat aan de voorwaarden van de stellingen die je gebruikt is voldaan.

Succes!

Voor $x \in \mathbb{R}^n$ en $i \in \{1, \dots, n\}$ duiden we met x_i de i-de coördinaat van x aan.

Opgave 1 (differentieerbaarheid, 4 pt)**.** We duiden met $\|\cdot\|$ de euclidische norm op $\mathbb{R}^2$ aan.

(i) Laat zien dat de volgende functie in het punt 0 differentieerbaar is en bereken haar afgeleide in dit punt:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \|x\|^2, & \text{als } x \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

(ii) We duiden met $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ de inverse van de tangens aan. We definiëren

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad g(y) := \begin{pmatrix} \sin(y_1 + y_2) \\ \arctan(y_1^2 - y_2^2) \end{pmatrix}.$$

Laat zien dat de functie $f \circ g$ in het punt (π, π) differentieerbaar is en bereken haar afgeleide in dit punt.

Opmerking: Je mag zonder bewijs gebruiken dat g differentieerbaar is.

Opgave 2 (systeem van vergelijkingen, 5 pt)**.** Laat zien dat er open omgevingen U van 0 in $\mathbb{R}^2$ en V van $(1, 1)$ in $\mathbb{R}^2$ bestaan zó, dat er voor elke $y \in V$ een unieke oplossing $x \in U$ bestaat van de vergelijkingen

$$\begin{aligned} e^{x_1 + x_2} &= y_1, \\ x_1^5 + x_2^5 + x_2 + 1 &= y_2. \end{aligned}$$

Opgave 3 (integraal over ball, 4 pt)**.** Zij $n \in \mathbb{N}$. We duiden met $\|\cdot\|$ de euclidische norm op $\mathbb{R}^n$ aan. We definiëren

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \big(x_i (\|x\|^4 - 1) \big).$$

Bereken de integraal van f over de eenheidsball $B_1^n(0)$.

Opmerking: Je hoeft niet te bewijzen dat f Riemann-integreerbaar is over $B_1^n(0)$.

Opgave 4 (dubbele integraal, 5 pt)**.** Bewijs dat de volgende dubbele integraal goed gedefinieerd is en bereken haar:

$$\int_{-1}^1 \left(\int_0^1 \sin(y^3) e^{x^2 + y^2} dx \right) dy.$$

Opgave 5 (Jordan-maat, 9 pt)**.** We definiëren

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x) := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix},$$
$$S := \big\{ T(x) \,\big|\, x \in [0, 1] \times \mathbb{R} : \ e^{x_1} - 1 \le x_2 \le e^{x_1} \big\}.$$

(i) Laat zien dat S Jordan-meetbaar is.

(ii) Bereken de Jordan-maat van S.

Voor meer opgaven z.o.z.

Opgave 6 (maximum van functie, 12 pt)**.** We definiëren

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^6 - x + y^6 - y = 0\},$$
$$f : M \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := x + y.$$

(i) Laat zien dat de functie f haar maximum aanneemt.

(ii) Bereken het maximum van f.

Opgave 7 (flux door oppervlak, 7 pt)**.** We definiëren

$$\Sigma := \left\{ \left(y, e^{(\|y\|^2)}\right) \mid y \in \overline{B}_1^2(0) \right\}.$$

Dit is een gladde deelvariëteit van $\mathbb{R}^3$ met rand. (Je hoeft dit *niet* te bewijzen.)

(i) Vind een eenheidsnormaalvectorveld ν op Σ.

(ii) We definiëren het vectorveld

$$X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad X(x) := \begin{pmatrix} x_1 \sin\left(e^{x_1+x_2}\right) \\ x_2 \sin\left(e^{x_1+x_2}\right) \\ \cos\left(e^{x_1-x_2}\right) \end{pmatrix}.$$

Bereken de flux

$$\int_\Sigma \begin{pmatrix} D_2X^3 - D_3X^2 \\ D_3X^1 - D_1X^3 \\ D_1X^2 - D_2X^1 \end{pmatrix} \cdot \nu \, dA.$$

Opmerking: Je kan het tweede deel van de opgave oplossen zelfs als je het eerste deel niet kon oplossen.

Opgave 8 (deelvariëteit, raakruimte, 12 pt)**.** We identificeren de verzameling $\mathbb{R}^{4\times4}$ van alle 4×4-matrices op een kanonieke manier met $\mathbb{R}^{16}$. Voor $A \in \mathbb{R}^{4\times4}$ noteren we met A^T de getransponeerte van A. We definiëren

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M := \{A \in \mathbb{R}^{4\times4} \mid A^TJA = J\}.$$

(i) Laat zien dat M een gladde deelvariëteit van $\mathbb{R}^{4\times4}$ is.

(ii) Bereken de dimensie van M.

(iii) Bereken de raakruimte aan M in het punt $\mathbf{1}$ (eenheidsmatrix).

Opgave 9 (ball diffeomorf met kubus, 9 pt)**.** Laat zien dat er voor elke $n \in \mathbb{N}$ een (surjectief) glad diffeomorfisme van de open ball $B_1^n(0)$ naar de open kubus $(-1,1)^n$ bestaat.

Tip: Beschouw ook de verzameling $\mathbb{R}^n$.

Je krijgt ook punten als je het probleem in het geval $n = 2$ oplost.