F. Ziltener

2019/ 2020, blok 4
13 juli, 2020

Analyse in meer variabelen, WISB212

Hertentamen

achternaam: ______________________ voornaam: ______________________

studentnummer: ____

Het tentamen duurt 180 minuten.

De cursusboeken van Duistermaat en Kolk en het dictaat over Analyse in meer variabelen mogen worden gebruikt. Andere hulpmiddelen alsmede het communiceren met andere personen zijn niet toegestaan.

25 punten zijn voldoende voor een cijfer 6.

Verklaring:

Hierbij verklaar ik dat ik de uitwerkingen bij dit hertentamen zelf heb gemaakt zonder hulp van andere personen of van andere hulpmiddelen behalve de cursusboeken van Duistermaat en Kolk en het dictaat voor Analyse in meer variabelen.

datum:

naam en voornaam:

handtekening:

Voor verdere aanwijzingen z.o.z.

1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
/4	/8	/4	/5	/11	/15	/10	/57

Aanwijzingen:

- Schrijf met een blauwe of zwarte pen, **niet** met een groene of rode pen, noch met een potlood.
- Druk het voorblad af, vul de gevraagde gegevens in, teken de verklaring en maak een foto of scan van het voorblad.
- Lever maar één oplossing voor elk probleem in.
- Schrijf je naam op elk vel.
- Schrijf niet te dicht bij de rand van een vel. (Bij scans wordt de rand vaak afgeschneden.)
- Maak één pdf-bestand van het ingevulde voorblad en je uitwerkingen.
- Dit bestand mag maximaal 15 MB groot zijn.
- Noem dit bestand als volgt:

  hertentamen_WISB212_achternaam_voornaam_studentnummer.pdf

  voorbeeld: hertentamen_WISB212_Dirksen_Sjoerd_1234567.pdf
- Ga naar blackboard, 2019-2020 4 Analyse in meer variabelen (WISB212).
- Klik op Assessments op de linkerkant.
- Als je geen recht hebt op extra tijd klik dan op:
  hertentamen over Analyse in meer variabelen, WISB212, 13 juli, 2020
- Als je recht hebt op extra tijd klik dan op:
  extra tijd, hertentamen over Analyse in meer variabelen, WISB212, 13 juli, 2020
- Upload onder Attach Files je bestand.
- Druk op submit.
- Je hebt 20 minuten de tijd om je uitwerkingen na afloop van het hertentamen in te leveren.

Tenzij anders aangegeven, mag je ieder resultaat ((hulp-)stelling, propositie of gevolg) gebruiken dat in het hoorcollege of in de cursusboeken is bewezen, zonder het opnieuw te bewijzen.

Tenzij anders aangegeven, mag je het volgende zonder bewijs gebruiken:

- Gladheid van een gegeven afbeelding als deze inderdaad glad is.
- De grafiek van een continue functie van een compacte deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}$ is verwaarloosbaar.
- We definiëren

$$\Psi : (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \big((-\infty,0] \times \{0\}\big),$$
$$\Psi(r,\varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

  De afbeelding Ψ is een C^∞-diffeomorfisme.
- Een formule voor $\det(D\Psi)$, waarbij Ψ door de bovenstaande formule gegeven wordt.

Bewijs elke andere uitspraak die je doet. Rechtvaardig je berekeningen. Ga na dat aan de voorwaarden van de stellingen die je gebruikt is voldaan.

Succes!

Voor elke $x \in \mathbb{R}^n$ en $i \in \{1, \dots, n\}$ duiden we met x_i de i-de coördinaat van x aan.

Opgave 1 (differentieerbaarheid, 4 pt)**.** (i) Laat zien dat de volgende functie in het punt $(1,0)$ differentieerbaar is en bereken haar afgeleide in dit punt:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \left\|x - (1,0)\right\|^2, & \text{als } x \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

(ii) We definiëren

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad g(y) := \begin{pmatrix} \cos(y_1 + y_2) \\ \sin(y_1^3 + y_2^3) \end{pmatrix}.$$

Laat zien dat de functie $f \circ g$ in het punt 0 differentieerbaar is en bereken haar afgeleide in dit punt.

Opmerking: Je mag zonder bewijs gebruiken dat g differentieerbaar is.

Opgave 2 (integraal over gebied in het vlak, 8 pt)**.** Zij $\varphi_0 \in (0, \pi)$. We definiëren

$$S := \big\{ r\big(\cos\varphi, \sin\varphi\big) \,\big|\, r \in [1,2],\ \varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0] \big\},$$
$$f : S \to \mathbb{R}, \quad f(x) := e^{\|x\|^2}.$$

(i) Laat zien dat f eigenlijk Riemann-integreerbaar is (over S).

(ii) Bereken de integraal $\int_S f(x)\, dx$.

Opmerking: Je kan deelopgave (ii) ook oplossen als je deel (i) niet hebt opgelost.

Opgave 3 (kromme in het vlak, 4 pt)**.** We definiëren

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad x(t) := \big(t^5 + t, e^{\sin(t^2)}\big).$$

Bewijs dat er een getal $t_0 \in (0, \infty)$, een open omgeving U van $(0,1)$ in $\mathbb{R}^2$ en een gladde afbeelding $\Phi : U \to \mathbb{R}^2$ bestaan zó, dat

$$x(t) \in U,\ \Phi \circ x(t) = (t, 0), \quad \forall t \in (-t_0, t_0).$$

Opgave 4 (integraal over bal, 5 pt)**.** (i) Zij $n \in \mathbb{N}$. Bereken het naar buiten wijzende eenheidsnormaalvectorveld op de rand van de bal $B_1^n(0)$.

(ii) We duiden met $\|\cdot\|$ de euclidische norm op $\mathbb{R}^4$ aan. We definiëren

$$X : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad X(x) := \sin\left(\|x\|^2\right) \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ -x_4 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$f := \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x_i} X_i : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}.$$

Bereken de integraal van f over de eenheidsball $B_1^4(0)$.

Opmerking: Je hoeft niet te bewijzen dat f Riemann-integreerbaar is over $B_1^4(0)$.

(Meer opgaven z.o.z.)

Opgave 5 (volume, 11 pt)**.** (i) Teken de verzameling

$$S_n := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x_i \geq 0,\, \forall i \in \{1, \ldots, n\},\, \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{i} \leq 1 \right\}$$

voor $n = 1, 2, 3$.

(ii) Zij $n \in \mathbb{N}$. Laat zien dat S_n Jordan-meetbaar is.

(iii) Bereken de Jordan-maat van S_n.

Opmerking: Je mag het feit gebruiken dat voor elke Jordan-meetbare verzameling $S \subseteq \mathbb{R}^m$ en elke $c \geq 0$ de verzameling

$$cS = \{ cx \mid x \in \mathbb{R}^m \}$$

Jordan-meetbaar is met Jordan-maat

$$|cS| = c^m |S|.$$

Opmerking: Je kan deelopgave (iii) ook oplossen als je deel (ii) niet hebt opgelost.

Opgave 6 (deelvariëteit, raakruimte, minimum van functie, 15 pt)**.** We definiëren

$$M := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid e^x - 2x + e^y - 2y = 2 \}.$$

(i) Laat zien dat M een deelvariëteit van $\mathbb{R}^2$ is.

(ii) Bereken haar dimensie.

(iii) Bereken haar raakruimte in elk punt.

We definiëren de functie

$$f : M \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := x + y.$$

(iv) Laat zien dat f haar minimum aanneemt.

(v) Bereken het minimum van f.

Opmerking: De deelopgaven zijn onafhankelijk van elkaar. Als je niet uitkomt met een deelopgave dan kan je de andere alsnog oplossen.

(Verdere opgave z.o.z.)

Opgave 7 (flux door een halve torus, 10 pt)**.** We definiëren

$$\Sigma := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2\right)^2 + x_3^2 = 1,\ x_3 \geq 0 \right\}.$$

Dit is een compacte twee-dimensionale gladde deelvariëteit van $\mathbb{R}^3$ met rand. (Je hoeft dit niet te bewijzen.)

(i) Maak een tekening van Σ.

(ii) Vind een eenheidsnormaalvectorveld ν op Σ.

(iii) Bereken $\nu(2, 0, 1)$.

(iv) Bereken de flux

$$\int_\Sigma X \cdot \nu \, dA$$

voor het constante vectorveld $X \equiv e_3$.

Tip: Beschouw het vectorveld

$$Y(x) := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Opmerkingen: Je hoeft niet te bewijzen dat in je berekening alle voortekens correct zijn.

Je kan deelopgave (iv) ook oplossen als je deel (ii) niet hebt opgelost.