Tentamen Inleiding Meetkunde
8 april 2020, 13.30-16.30 uur

- Bij dit tentamen mogen de volgende hulpmiddelen gebruikt worden: het dictaat, aantekeningen, uitwerkingen van opgaven en inleveropgaven, colleges en uitleg in Teams, een (grafische) rekenmachine en GeoGebra. Je mag zonder bewijs gebruik maken van de opgaven die in de lopende tekst staan, maar *niet* van de andere opgaven.
- Schrijf op elk vel je naam en studentnummer.
- Naast je uitwerkingen moet je ook een vel opsturen met daarop de volgende tekst, ondertekend met je handtekening:

  "Hierbij verklaar ik dat ik de uitwerkingen van dit tentamen zelf heb gemaakt, zonder hulp van andere personen of van hulpmiddelen die niet toegestaan zijn."

- Om 16.30 heb je een uur, dus tot 17.30, de tijd om je uitwerkingen, plus de bovengenoemde tekst, in te scannen en te uploaden op Blackboard (langwerkers hebben een half uur langer). In de tijd van 16.30-17.30 wordt van je verwacht dat je niet meer aan de opgaven werkt. Upload je uitwerkingen als één pdf-bestand.
- Je mag zelf weten in welke volgorde je de opgaven maakt.
- Je mag eerdere onderdelen van een opgave gebruiken, ook als je ze niet bewezen hebt.
- Het aantal te behalen punten is *niet* noodzakelijk evenredig met de moeilijkheid van de deelopgave.
- Laat bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt, tenzij anders aangegeven.
- Veel succes!

Opgave 1. We bekijken de verzameling $A \subset \mathbb{R}^2$ gegeven door de vereniging van de x-as en de y-as, oftewel $A = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.
We definiëren op de verzameling A de metriek $d : A \times A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ door te zeggen dat de afstand tussen twee punten gelijk is aan de lengte van het kortste pad van het ene naar het andere punt door over de x-as en de y-as te lopen. In formulevorm: voor punten $P = (x_0, y_0)$ en $Q = (x_1, y_1)$ in A geldt

$$d(P,Q) = |x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|.$$

Zo is bijvoorbeeld de afstand tussen $(0,3)$ en $(0,7)$ gelijk aan 4, terwijl de afstand tussen $(1,0)$ en $(0,-4)$ gelijk is aan 5.

(a) (*1 punt.*) Zij T een isometrie van (A,d). Laat zien dat $T(0,0) = (0,0)$.

(b) (*1 punt.*) Geef een isometrie van (A,d) die *niet* uit te breiden is naar een isometrie van $\mathbb{E}^2$. Dat wil zeggen, geef een isometrie T van (A,d) zodat er *geen* isometrie T' van $\mathbb{E}^2$ bestaat die voldoet aan $T(x,y) = T'(x,y)$ voor alle $(x,y) \in A$.
N.B.: je hoeft je antwoord bij deze deelvraag niet te bewijzen.

Opgave 2. In deze opgave bekijken we het Euclidische vlak $\mathbb{E}^2$.

(a) ($\frac{1}{2}$ *punt.*) Bewijs dat er geen translatie $T\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ bestaat zodat $T(1,1) = (3,0)$ en $T(6,1) = (0,4)$.

(b) ($\frac{1}{2}$ *punt.*) Bewijs met behulp van opgave (a) dat er een rotatie $T\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ bestaat zodat $T(1,1) = (3,0)$ en $T(6,1) = (0,4)$.

(c) (*1 punt.*) Er is nog precies één andere isometrie $T\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ zodat $T(1,1) = (3,0)$ en $T(6,1) = (0,4)$. Is dit een spiegeling of een glijspiegeling (met verplaatsingsvector ongelijk aan $\mathbf{0}$)? Motiveer je antwoord.

Opgave 3. In deze opgave bekijken we de bolschil S^2.

(a) (*1 punt.*) Bewijs dat er geen punten $P, Q, R \in S^2$ bestaan zodat

$$d(P,Q) > \tfrac{2\pi}{3}, \quad d(P,R) > \tfrac{2\pi}{3} \quad \text{en} \quad d(Q,R) > \tfrac{2\pi}{3}.$$

(b) (*1 punt.*) Geef punten $P, Q, R \in S^2$ zodat

$$d(P,Q) \geq \tfrac{2\pi}{3}, \quad d(P,R) \geq \tfrac{2\pi}{3} \quad \text{en} \quad d(Q,R) \geq \tfrac{2\pi}{3},$$

en laat zien dat de P, Q, R die je geeft hier inderdaad aan voldoen.

Opgave 4. Bekijk de punten $O = (1,0,0)$ en $A = (3, \sqrt{2}, \sqrt{6})$ op de hyperboloïde $\mathcal{H}^2$. Schrijf k voor de groothyperbool gedefinieerd door het tx-vlak, georiënteerd in de positieve x-richting, en schrijf ℓ voor de groothyperbool gedefinieerd door het ty-vlak, georiënteerd in de positieve y-richting.

(a) (*1 punt.*) Toon aan dat er een $s \in \mathbb{R}$ bestaat zodat $(\mathrm{Tr}_{\ell,s} \circ \mathrm{Tr}_{k,s})(O) = A$.

(b) (*1 punt.*) Toon aan dat er *geen* $s \in \mathbb{R}$ bestaat zodat $(\mathrm{Tr}_{k,s} \circ \mathrm{Tr}_{\ell,s})(O) = A$.

Opgave 5.

(a) (*1 punt.*) Laat $E, F \subseteq \mathbb{A}^n$ affiene deelruimten zijn. Bewijs dat

$$\max(\dim E, \dim F) \leq \dim\langle E, F\rangle \leq \dim E + \dim F + 1.$$

Beide ongelijkheden zijn $\frac{1}{2}$ punt waard.

(b) (*1 punt.*) Wat zijn de homogene coördinaten van het punt $(1:4) \in \mathbb{P}^1$ ten opzichte van het projectieve kader $(2:3)$, $(4:7)$, $(1:2)$ van $\mathbb{P}^1$? Motiveer je antwoord.

Uitwerkingen Tentamen Inleiding Meetkunde
8 april 2020, 13.30-16.30 uur

Opgave 1.

(a) Stel dat $T(0,0) \neq (0,0)$; we nemen zonder verlies van algemeenheid aan dat $T(0,0)$ op de positieve x-as terecht komt, en schrijven dus $T(0,0) = (r,0)$ met $r > 0$. Er zijn precies 4 punten in A op afstand r van $(0,0)$, namelijk $(r,0)$, $(0,r)$, $(-r,0)$ en $(0,-r)$. Omdat T injectief is en afstanden bewaart moeten er ook 4 verschillende punten op afstand r van $(r,0)$ zijn. Echter, er zijn maar 2 zulke punten, namelijk $(0,0)$ en $(2r,0)$. Dit geeft dus een tegenspraak, dus moet wel gelden dat $T(0,0) = (0,0)$.

(b) Een mogelijk voorbeeld is: wissel de positieve x- en y-as om, maar laat de negatieve assen hetzelfde. Als functievoorschrift:

$$T(x,0) = \begin{cases} (0,x) & \text{als } x \geq 0; \\ (x,0) & \text{als } x < 0, \end{cases} \quad \text{en} \quad T(0,y) = \begin{cases} (y,0) & \text{als } y \geq 0; \\ (0,y) & \text{als } y < 0. \end{cases}$$

Opgave 2. Schrijf $A = (1,1)$, $B = (6,1)$, $A' = (3,0)$ en $B' = (0,4)$.

(a) Stel dat er wel zo'n $T = \mathrm{Tr}_{\mathbf{v}}$ bestaat. Wegens $T(A) = A'$ moet dan gelden dat $\mathbf{v} = \overrightarrow{AA'} = (2,-1)^t$, maar wegens $T(B) = B'$ moet juist gelden dat $\mathbf{v} = \overrightarrow{BB'} = (-6,3)^t$. Dit is niet mogelijk.

(b) Omdat $d(A,B) = 5 = d(A',B')$, bestaat er precies één directe isometrie T van $\mathbb{E}^2$ zodat $T(A) = A'$ en $T(B) = B'$ (Propositie 2.4.5). Wegens (a) kan T geen translatie zijn, dus T moet een rotatie zijn.

(c) Het is een spiegeling. Laat $M = (2, \frac{1}{2})$ en $N = (3, \frac{5}{2})$ de middens van AA' resp. BB' zijn. Dan staat $\overrightarrow{MN} = (1,2)^t$ loodrecht op zowel $\overrightarrow{AA'} = (2,-1)^t$ als $\overrightarrow{BB'} = (-6,3)^t$. Oftewel, de lijn MN staat loodrecht op de lijnen AA' en BB'. Als T nu de spiegeling in de lijn MN is, dan geldt $T(A) = A'$ en $T(B) = B'$.

Alternatief. Bekijk het punt $C = (\frac{9}{4}, 1)$. Dan geldt $C = \frac{1}{4}A + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}A' + \frac{3}{4}B'$, dus C is het snijpunt van de lijnstukken AB en $A'B'$. Stel nu dat T een isometrie is zodat $T(A) = A'$ en $T(B) = B'$. Uit Propositie 2.3.8 volgt nu dat

$$T(C) = \tfrac{1}{4}T(A) + \tfrac{3}{4}T(B) = \tfrac{1}{4}A' + \tfrac{3}{4}B' = C.$$

Oftewel, T moet het punt C op zichzelf afbeelden. Echte glijspiegelingen hebben geen dekpunten, dus T kan geen echte glijspiegeling zijn. Maar de overgebleven isometrie T is wel indirect, dus moet het een spiegeling zijn.

Opgave 3.

(a) Stel dat zulke $P, Q, R \in S^2$ wel bestaan. Zij P' de antipodaal van P. Dan geldt $d(P', Q) = \pi - d(P, Q) < \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ en $d(P', R) = \pi - d(P, R) < \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$. De driehoeksongelijkheid geeft nu dat:

$$\tfrac{2\pi}{3} < d(Q, R) \leq d(P', Q) + d(P', R) < \tfrac{\pi}{3} + \tfrac{\pi}{3} = \tfrac{2\pi}{3},$$

tegenspraak.

Alternatief. Stel dat zulke $P, Q, R \in S^2$ wel bestaan.. Schrijf $\alpha = d(Q, R)$, $\beta = d(P, R)$ en $\gamma = d(P, Q)$, en definieer a als de hoek tussen de (korte) bogen PQ en PR. We nemen dus aan dat $\alpha, \beta, \gamma > \frac{2\pi}{3}$. Omdat $\sin\beta, \sin\gamma \geq 0$ en $\cos a \geq -1$ volgt uit de cosinusregel dat:

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a \geq \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma = \cos(\beta + \gamma).$$

Omdat $\alpha \in (\frac{2\pi}{3}, \pi]$, geldt $\cos\alpha < -\frac{1}{2}$, en omdat $\beta + \gamma \in (\frac{4\pi}{3}, 2\pi]$, geldt juist $\cos(\beta + \gamma) > -\frac{1}{2}$. Oftewel, we hebben $\cos\alpha < -\frac{1}{2} < \cos(\beta + \gamma)$, tegenspraak!

(b) Neem $P = (1, 0, 0)$, $Q = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}, 0)$ en $R = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0)$. Dan rekenen we eenvoudig na dat $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$, $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}$ en $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}$ alledrie gelijk zijn aan $-\frac{1}{2}$, dus zijn $d(P, Q)$, $d(P, R)$ en $d(Q, R)$ alle drie gelijk aan $\frac{2\pi}{3}$.

Opgave 4. De translaties $\mathrm{Tr}_{k,s}$ en $\mathrm{Tr}_{\ell,s}$ worden gegeven door de matrices:

$$M = \begin{pmatrix} \cosh s & \sinh s & 0 \\ \sinh s & \cosh s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad N = \begin{pmatrix} \cosh s & 0 & \sinh s \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh s & 0 & \cosh s \end{pmatrix}.$$

(a) We nemen $s = \operatorname{arcsinh}(\sqrt{2})$; dan geldt $\cosh s = \sqrt{\sinh^2 s - 1} = \sqrt{3}$. Uitwerken geeft $NM \cdot (1, 0, 0)^t = (\cosh^2 s, \sinh s, \sinh s \cosh s)^t = ((\sqrt{3})^2, \sqrt{2}, \sqrt{2} \cdot \sqrt{3})^t = (3, \sqrt{2}, \sqrt{6})^t$, dus deze s voldoet.

(b) Stel dat zo'n s bestaat. Uitwerken geeft

$$(3, \sqrt{2}, \sqrt{6})^t = MN \cdot (1, 0, 0)^t = (\cosh^2 s, \sinh s \cosh s, \sinh s)^t.$$

Er geldt dus $\sinh^2 s = \sqrt{6}^2 = 6$ en $\cosh^2 s = 3$, maar dat is niet mogelijk, wegens $\cosh^2 s - \sinh^2 s = 1$. Zo'n s kan dus niet bestaan.

Opgave 5.

(a) Per definitie geldt $E \subseteq \langle E, F\rangle$, dus ook $\dim E \leq \dim\langle E, F\rangle$. Net zo geldt $\dim F \leq \dim\langle E, F\rangle$, dus kunnen we concluderen dat $\max(\dim E, \dim F) \leq \dim\langle E, F\rangle$.

Voor de andere ongelijkheid, schrijf $E = A_0 + U$ en $k = \dim E = \dim U$. Zij $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k$ een basis voor U, en schrijf $A_i = A_0 + \mathbf{b}_i$ voor $1 \leq i \leq k$. Dan geldt $U = \mathrm{Span}(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k) = \mathrm{Span}\left(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k}\right)$, en dus

$$E = A_0 + U = A_0 + \mathrm{Span}\left(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k}\right) = \langle A_0, A_1, \ldots, A_k\rangle,$$

wegens Voorbeeld 5.2.15. Net zo kunnen we F schrijven als $\langle B_0, \ldots, B_\ell\rangle$, waarbij $\ell = \dim F$. Bekijk nu de ruimte $G = \langle A_0, \ldots, A_k, B_0, \ldots, B_\ell\rangle$. Dan geldt $E \subseteq G$ en $F \subseteq G$, dus ook $\langle E, F\rangle \subseteq G$ (hier geldt overigens altijd gelijkheid), en dus ook

$$\dim\langle E, F\rangle \leq \dim G \leq (k + 1 + l + 1) - 1 = k + l + 1 = \dim E + \dim F + 1.$$

Alternatief. Wegens Propositie 6.2.7 bestaan er *projectieve* deelruimten $E', F' \subseteq \mathbb{P}^n$ zodat $E = E' \cap \mathbb{A}^n$ en $F = F' \cap \mathbb{A}^n$, zodat bovendien geldt dat $\dim E = \dim E'$ en $\dim F = \dim F'$. Bekijk nu het *projectieve* opspansel $\langle E', F'\rangle$ van E' en F'. Dan is $\langle E', F'\rangle \cap \mathbb{A}^n$ weer een affiene deelruimte, die bovendien zowel E als F bevat, dus $\langle E, F\rangle \subseteq \langle E', F'\rangle \cap \mathbb{A}^n$ (hier geldt overigens altijd gelijkheid). Daarnaast geldt dat $\dim(E' \cap F') \geq -1$, dus volgt uit de *projectieve* dimensiestelling dat:

$$\begin{aligned}\dim\langle E, F\rangle &\leq \dim(\langle E', F'\rangle \cap \mathbb{A}^n) = \dim\langle E', F'\rangle = \dim E' + \dim F' - \dim(E' \cap F') \\ &\leq \dim E' + \dim F' + 1 = \dim E + \dim F + 1.\end{aligned}$$

(b) Er geldt $(-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, dus een bijbehorende basis van $\mathbb{R}^2$ voor dit kader is $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$. Daarnaast geldt $9 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, dus het punt $(1 : 4)$ krijgt als nieuwe coördinaten: $(9 : 5)$.