Hertentamen Inleiding Meetkunde
1 juli 2020, 13.30-16.30 uur

- Bij dit tentamen mogen de volgende hulpmiddelen gebruikt worden: het dictaat, aantekeningen, uitwerkingen van opgaven en inleveropgaven, colleges en uitleg in Teams, een (grafische) rekenmachine en GeoGebra. Je mag zonder bewijs gebruik maken van de opgaven die in de lopende tekst staan, maar *niet* van de andere opgaven, tenzij anders aangegeven.

- Schrijf op elk vel je naam en studentnummer.

- Naast je uitwerkingen moet je ook een vel opsturen met daarop de volgende tekst, ondertekend met je handtekening:

  "Hierbij verklaar ik dat ik de uitwerkingen van dit tentamen zelf heb gemaakt, zonder hulp van andere personen of van hulpmiddelen die niet toegestaan zijn."

- Om 16.30 heb je een uur, dus tot 17.30, de tijd om je uitwerkingen, plus de bovengenoemde tekst, in te scannen en te uploaden op Blackboard (langwerkers hebben een half uur langer). In de tijd van 16.30-17.30 wordt van je verwacht dat je niet meer aan de opgaven werkt. Upload je uitwerkingen als één pdf-bestand.

- Je mag zelf weten in welke volgorde je de opgaven maakt. De opgaven staan *naar onze inschatting* in oplopende moeilijkheidsgraad.

- Je mag eerdere onderdelen van een opgave gebruiken, ook als je ze niet bewezen hebt.

- Laat bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt, tenzij anders aangegeven.

- Veel succes!

De opgaven beginnen op de volgende pagina.

Opgave 1. (1 punt) Bekijk in $\mathbb{P}^3$ de projectieve deelruimten $U = \{(1:1:1:1)\}$, en $V \subseteq \mathbb{P}^3$ gegeven door het stelsel:

$$\begin{cases} x_0 + x_1 = x_2 + x_3; \\ 2x_0 = x_1 - x_3. \end{cases}$$

Bepaal $\dim\langle U, V\rangle$.

Opgave 2. (2 punten) Gegeven zijn de vier punten $P_1 = (1,0)$, $P_2 = (0,1)$, $Q_1 = (3,5)$ en $Q_2 = (4,2)$ in $\mathbb{A}^2$.

(a) **(0.75 punt)** Geef een voorbeeld van punten P_3 en Q_3 in $\mathbb{A}^2$ zodat er *geen* affiene transformatie $T\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ bestaat met $T(P_1) = Q_1$, $T(P_2) = Q_2$ en $T(P_3) = Q_3$. Toon aan dat je voorbeeld correct is.

(b) **(0.75 punt)** Geef een voorbeeld van punten P_3 en Q_3 in $\mathbb{A}^2$ zodat er *precies één* affiene transformatie $T\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ bestaat met $T(P_1) = Q_1$, $T(P_2) = Q_2$ en $T(P_3) = Q_3$. Toon aan dat je voorbeeld correct is.

(c) **(0.5 punt)** Geef een voorbeeld van punten P_3 en Q_3 in $\mathbb{A}^2$ zodat er *oneindig veel* affiene transformaties $T\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ bestaan met $T(P_1) = Q_1$, $T(P_2) = Q_2$ en $T(P_3) = Q_3$. Je hoeft hier **niet** te bewijzen dat je voorbeeld correct is.

Opgave 3. (2 punten) Gegeven zijn twee metrische ruimten (A, d_A) en (B, d_B). Schrijf $A \times B$ voor het cartesisch product van A en B, d.w.z. de verzameling van alle (geordende) paren (a,b) met $a \in A$ en $b \in B$. We definiëren de functie

$$d_{A\times B}\colon (A\times B)\times(A\times B) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

door middel van:

$$d_{A\times B}((a,b),(a',b')) = \max(d_A(a,a'), d_B(b,b')).$$

Toon aan dat $(A\times B, d_{A\times B})$ ook een metrische ruimte is, dus:

(a) **(0.5 punt)** Laat zien dat $d_{A\times B}$ niet-gedegenereerd is.

(b) **(0.5 punt)** Laat zien dat $d_{A\times B}$ symmetrisch is.

(c) **(1 punt)** Laat zien dat $d_{A\times B}$ aan de driehoeksongelijkheid voldoet.

Opgave 4. (1.5 punt) Geef een isometrie $T\colon S^2 \to S^2$ van de bolschil die voldoet aan $T((\frac{1}{4}\sqrt{6}, \frac{1}{4}\sqrt{6}, \frac{1}{2})) = (0,0,1)$. Geef ook de matrix die hoort bij de isometrie T die je geeft. Hint: voer eerst een geschikt rotatie om de z-as uit, zodat $(\frac{1}{4}\sqrt{6}, \frac{1}{4}\sqrt{6}, \frac{1}{2})$ in het yz-vlak komt te liggen. Teken een plaatje!

N.B.: de laatste vragen van dit tentamen zijn te vinden op de volgende pagina.

Opgave 5. (1.5 punt) In de Poincaréschijf bekijken we de cirkel C met middelpunt $(\frac{2}{5}, 0)$ en *Euclidische* straal $\frac{2}{5}$. Deze cirkel is dus de verzameling punten

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d_{\mathbb{E}^2}((x, y), (\tfrac{2}{5}, 0)) = \tfrac{2}{5}\}.$$

Deze cirkel C blijkt ook een *hyperbolische* cirkel te zijn, maar met een andere (hyperbolische) straal r_h en een ander middelpunt M_h. In deze opgave bepalen we r_h en M_h. *Bij beide deelopgaven komt Opgave 4.12(c) van pas: als* $0 < r < 1$, *dan is de hyperbolische afstand tussen* $(0, 0)$ *en* $(r, 0)$ *gelijk aan* $\log \frac{1+r}{1-r}$.

(a) **(0.75 punt)** Bepaal r_h. Hint: de cirkel C snijdt de x-as in twee punten, en de (hyperbolische) afstand tussen deze twee punten is de (hyperbolische) *diameter* van C.

(b) **(0.75 punt)** Bepaal nu ook de coördinaten van M_h. Hint: wegens symmetrie moet M_h in ieder geval op de (positieve) x-as liggen.

Opgave 6. (2 punten) Zij $n > 1$ een geheel getal.

(a) **(0.5 punt)** Zij $r > 0$ een reëel getal. Gegeven zijn punten $A, B, C, D \in \mathbb{E}^n$ die voldoen aan:

$$d(A, B) = d(A, C) = d(B, C) = d(B, D) = d(C, D) = r.$$

Toon aan dat $d(A, D) \leq 2r$.

(b) **(0.75 punt)** Laat nu zien dat $d(A, D) = 2r$ niet mogelijk is, en concludeer dat $d(A, D) < 2r$.

(c) **(0.75 punt)** Bewijs dat er geen afstandsbewarende functie $S^2 \to \mathbb{E}^n$ bestaat. Hint: kies vier slim gekozen punten in S^2 en gebruik opgave (b).

Uitwerkingen Hertentamen Inleiding Meetkunde
1 juli 2020, 13.30-16.30 uur

Opgave 1. Er geldt $\dim U = 0$, want U bestaat uit een enkel punt. Daarnaast wordt V gegeven door twee onafhankelijke lineaire vergelijkingen in $\mathbb{P}^3$, dus V is een lijn, oftewel $\dim V = 1$. Tot slot ligt $(1 : 1 : 1 : 1)$ niet op de lijn V (dit punt voldoet niet aan de tweede vergelijking), dus geldt $U \cap V = \emptyset$, oftewel $\dim U \cap V = -1$. Uit de dimensiestelling volgt nu dat $\dim\langle U, V\rangle = 0 + 1 - (-1) = 2$.

Opgave 2.

(a) Neem bijvoorbeeld $P_3 = (0, 0) \neq P_2$ en $Q_3 = (4, 2) = Q_2$. Dan zou moeten gelden dat $T(P_2) = Q_2 = Q_3 = T(P_3)$ terwijl $P_2 \neq P_3$. Dit kan echter niet, want affiene transformaties zijn altijd injectief.

(b) Neem P_3 *niet* op de lijn P_1P_2, en Q_3 *niet* op de lijn Q_1Q_2, bijvoorbeeld: $P_3 = Q_3 = (0, 0)$. Dan zijn P_1, P_2, P_3 en Q_1, Q_2, Q_3 beide kaders voor $\mathbb{A}^2$, dus wegens Stelling 5.4.8(ii) is er een unieke affiene transformatie T die aan de voorwaarden voldoet.

(c) Een mogelijk voorbeeld is: neem $P_3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ het midden van P_1P_2, en $Q_3 = (\frac{7}{2}, \frac{7}{2})$ het midden van Q_1Q_2. [Uitleg: elke affiene transformatie die P_1 naar Q_1 en P_2 naar Q_2 stuurt, stuurt ook automatisch P_3 naar Q_3, wegens Gevolg 5.4.7. Bovendien zijn er oneindig veel zulke affiene transformaties.]

Opgave 3.

(a) Omdat $d_A(a, a') \geq 0$ en $d(b, b') \geq 0$, geldt dat

$$d_{A\times B}((a, b), (a', b')) = \max(d_A(a, a'), d_B(b, b')) = 0$$

precies als $d_A(a, a') = 0$ **en** $d_B(b, b') = 0$. Dit betekent precies dat $a = a'$ en $b = b'$, oftewel $(a, b) = (a', b')$.

(b) Omdat d_A en d_B beide symmetrisch zijn, geldt:

$$d_{A\times B}((a, b), (a', b')) = \max(d_A(a, a'), d_B(b, b')) = \max(d_A(a', a), d_B(b', b)) = d_{A\times B}((a', b'), (a, b)).$$

(c) Omdat d_A aan de driehoeksongelijkheid voldoet, geldt:

$$\begin{aligned} d_{A\times B}((a, b), (a', b')) + d_{A\times B}((a', b'), (a'', b'')) &= \max(d_A(a, a'), d_B(b, b')) + \max(d_A(a', a''), d_B(b', b'')) \\ &\geq d_A(a, a') + d_A(a', a'') \geq d_A(a, a''). \end{aligned}$$

Net zo tonen we aan dat $d_{A\times B}((a, b), (a', b')) + d_{A\times B}((a', b'), (a'', b'')) \geq d_B(b, b'')$, dus we hebben:

$$\begin{aligned} d_{A\times B}((a, b), (a', b')) + d_{A\times B}((a', b'), (a'', b'')) &\geq \max(d_A(a, a''), d_B(b, b'')) \\ &= d_{A\times B}((a, b), (a'', b'')). \end{aligned}$$

Opgave 4. Het punt $(\frac{1}{4}\sqrt{6}, \frac{1}{4}\sqrt{6}, \frac{1}{2})$ ligt in het vlak $x = y$, dus een rotatie om de z-as met hoek $\frac{\pi}{4}$ zorgt er voor dat dit punt in het yz-vlak komt te liggen, boven de positieve y-as. Deze rotatie beeldt $(\frac{1}{4}\sqrt{6}, \frac{1}{4}\sqrt{6}, \frac{1}{2})$ dus af op $(0, \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ (want de z-coördinaat blijft hetzelfde). De afstand tussen $(0, \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ en $(0, 0, 1)$ is $\frac{\pi}{3}$; als we dus nog een rotatie om de x-as met hoek $\frac{\pi}{3}$ uitvoeren, dan wordt $(0, \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ afgebeeld op $(0, 0, 1)$. Een geschikte isometrie T is dus de samenstelling van deze rotaties; en de bijbehorende matrix is:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{4}\sqrt{6} & \frac{1}{4}\sqrt{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Opgave 5.

(a) De cirkel C snijdt de x-as in $O = (0, 0)$ en $A = (\frac{4}{5}, 0)$. De hyperbolische diameter van C is gelijk aan de hyperbolische afstand tussen O en A, en dat is $\log \frac{1+\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}} = \log 9$. Er geldt dus dat $r_h = \frac{1}{2}\log 9 = \log 3$.

(b) Het punt M_h ligt op de positieve x-as, dus we kunnen schrijven $M_h = (r, 0)$ met $0 < r < 1$. De afstand tussen O en M_h moet gelijk zijn aan $r_h = \log 3$, dus we moeten oplossen: $\log \frac{1+r}{1-r} = \log 3$. Dit geeft $\frac{1+r}{1-r} = 3$, wat opgelost kan worden tot $r = \frac{1}{2}$. Dus $M_h = (\frac{1}{2}, 0)$.

Opgave 6.

(a) Uit de driehoeksongelijkheid volgt dat $d(A, D) \le d(A, B) + d(B, D) = r + r = 2r$.

(b) Als $d(A, D) = 2r$, dan geldt er gelijkheid in de driehoeksongelijkheid hierboven, dus ligt B op het lijnstuk AD. Op dezelfde manier tonen we aan dat C op het lijnstuk AD ligt. Bovendien hebben B en C dezelfde afstanden tot A en D (in alle gevallen r), dus wegens Opgave 2.6(b) moet gelden dat $B = C$. Echter, $d(B, C) = r > 0$, tegenspraak.

(c) Stel dat zo'n T wel bestaat. Beschouw $A_0 = (1, 0, 0)$, $B_0 = (0, 1, 0)$, $C_0 = (0, 0, 1)$ en $D_0 = (-1, 0, 0)$. Dan geldt $d_{S^2}(A_0, D_0) = \pi$, terwijl de overige 5 ondelinge afstanden (op de bol) tussen A_0, B_0, C_0, D_0 allemaal $\frac{\pi}{2}$ zijn. Schrijf nu $A = T(A_0)$ etc. Omdat T afstanden bewaart, vormen $A, B, C, D \in \mathbb{R}^n$ nu een configuratie zoals in opgaven (a) en (b) met $r = \frac{\pi}{2}$, waarbij bovendien geldt dat $d(A, D) = \pi = 2r$. Echter, we hebben bewezen dat dit niet mogelijk is, dus zo'n T kan niet bestaan.