

Hertentamen Inleiding Meetkunde

1 juli 2020, 13.30-16.30 uur

- Bij dit tentamen mogen de volgende hulpmiddelen gebruikt worden: het dictaat, aantekeningen, uitwerkingen van opgaven en inleveropgaven, colleges en uitleg in Teams, een (grafische) rekenmachine en GeoGebra. Je mag zonder bewijs gebruik maken van de opgaven die in de lopende tekst staan, maar *niet* van de andere opgaven, tenzij anders aangegeven.
- Schrijf op elk vel je naam en studentnummer.
- Naast je uitwerkingen moet je ook een vel opsturen met daarop de volgende tekst, ondertekend met je handtekening:

“Hierbij verklaar ik dat ik de uitwerkingen van dit tentamen zelf heb gemaakt, zonder hulp van andere personen of van hulpmiddelen die niet toegestaan zijn.”
- Om 16.30 heb je een uur, dus tot 17.30, de tijd om je uitwerkingen, plus de bovengenoemde tekst, in te scannen en te uploaden op Blackboard (langwerkers hebben een half uur langer). In de tijd van 16.30-17.30 wordt van je verwacht dat je niet meer aan de opgaven werkt. Upload je uitwerkingen als één pdf-bestand.
- Je mag zelf weten in welke volgorde je de opgaven maakt. De opgaven staan *naar onze inschatting* in oplopende moeilijkheidsgraad.
- Je mag eerdere onderdelen van een opgave gebruiken, ook als je ze niet bewezen hebt.
- Laat bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt, tenzij anders aangegeven.
- Veel succes!

De opgaven beginnen op de volgende pagina.

Opgave 1. (1 punt) Bekijk in \mathbb{P}^3 de projectieve deelruimten $U = \{(1 : 1 : 1 : 1)\}$, en $V \subseteq \mathbb{P}^3$ gegeven door het stelsel:

$$\begin{cases} x_0 + x_1 = x_2 + x_3; \\ 2x_0 = x_1 - x_3. \end{cases}$$

Bepaal $\dim\langle U, V \rangle$.

Opgave 2. (2 punten) Gegeven zijn de vier punten $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (0, 1)$, $Q_1 = (3, 5)$ en $Q_2 = (4, 2)$ in \mathbb{A}^2 .

- (a) **(0.75 punt)** Geef een voorbeeld van punten P_3 en Q_3 in \mathbb{A}^2 zodat er *geen* affine transformatie $T: \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ bestaat met $T(P_1) = Q_1$, $T(P_2) = Q_2$ en $T(P_3) = Q_3$. Toon aan dat je voorbeeld correct is.
- (b) **(0.75 punt)** Geef een voorbeeld van punten P_3 en Q_3 in \mathbb{A}^2 zodat er *precies één* affine transformatie $T: \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ bestaat met $T(P_1) = Q_1$, $T(P_2) = Q_2$ en $T(P_3) = Q_3$. Toon aan dat je voorbeeld correct is.
- (c) **(0.5 punt)** Geef een voorbeeld van punten P_3 en Q_3 in \mathbb{A}^2 zodat er *oneindig veel* affine transformaties $T: \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ bestaan met $T(P_1) = Q_1$, $T(P_2) = Q_2$ en $T(P_3) = Q_3$. Je hoeft hier **niet** te bewijzen dat je voorbeeld correct is.

Opgave 3. (2 punten) Gegeven zijn twee metrische ruimten (A, d_A) en (B, d_B) . Schrijf $A \times B$ voor het cartesisch product van A en B , d.w.z. de verzameling van alle (geordende) paren (a, b) met $a \in A$ en $b \in B$. We definiëren de functie

$$d_{A \times B}: (A \times B) \times (A \times B) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

door middel van:

$$d_{A \times B}((a, b), (a', b')) = \max(d_A(a, a'), d_B(b, b')).$$

Toon aan dat $(A \times B, d_{A \times B})$ ook een metrische ruimte is, dus:

- (a) **(0.5 punt)** Laat zien dat $d_{A \times B}$ niet-gedegeneerd is.
- (b) **(0.5 punt)** Laat zien dat $d_{A \times B}$ symmetrisch is.
- (c) **(1 punt)** Laat zien dat $d_{A \times B}$ aan de driehoeksongelijkheid voldoet.

Opgave 4. (1.5 punt) Geef een isometrie $T: S^2 \rightarrow S^2$ van de bolschil die voldoet aan $T((\frac{1}{4}\sqrt{6}, \frac{1}{4}\sqrt{6}, \frac{1}{2})) = (0, 0, 1)$. Geef ook de matrix die hoort bij de isometrie T die je geeft. Hint: voer eerst een geschikt rotatie om de z -as uit, zodat $(\frac{1}{4}\sqrt{6}, \frac{1}{4}\sqrt{6}, \frac{1}{2})$ in het yz -vlak komt te liggen. Teken een plaatje!

N.B.: de laatste vragen van dit tentamen zijn te vinden op de volgende pagina.

Opgave 5. (1.5 punt) In de Poincaréschijf bekijken we de cirkel C met middelpunt $(\frac{2}{5}, 0)$ en *Euclidische* straal $\frac{2}{5}$. Deze cirkel is dus de verzameling punten

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d_{\mathbb{E}^2}((x, y), (\frac{2}{5}, 0)) = \frac{2}{5}\}.$$

Deze cirkel C blijkt ook een *hyperbolische* cirkel te zijn, maar met een andere (hyperbolische) straal r_h en een ander middelpunt M_h . In deze opgave bepalen we r_h en M_h . Bij beide deelopgaven komt Opgave 4.12(c) van pas: als $0 < r < 1$, dan is de hyperbolische afstand tussen $(0, 0)$ en $(r, 0)$ gelijk aan $\log \frac{1+r}{1-r}$.

- (a) **(0.75 punt)** Bepaal r_h . Hint: de cirkel C snijdt de x -as in twee punten, en de (hyperbolische) afstand tussen deze twee punten is de (hyperbolische) *diameter* van C .
- (b) **(0.75 punt)** Bepaal nu ook de coördinaten van M_h . Hint: wegens symmetrie moet M_h in ieder geval op de (positieve) x -as liggen.

Opgave 6. (2 punten) Zij $n > 1$ een geheel getal.

- (a) **(0.5 punt)** Zij $r > 0$ een reëel getal. Gegeven zijn punten $A, B, C, D \in \mathbb{E}^n$ die voldoen aan:

$$d(A, B) = d(A, C) = d(B, C) = d(B, D) = d(C, D) = r.$$

Toon aan dat $d(A, D) \leq 2r$.

- (b) **(0.75 punt)** Laat nu zien dat $d(A, D) = 2r$ niet mogelijk is, en concludeer dat $d(A, D) < 2r$.
- (c) **(0.75 punt)** Bewijs dat er geen afstandsbeurende functie $S^2 \rightarrow \mathbb{E}^n$ bestaat. Hint: kies vier slim gekozen punten in S^2 en gebruik opgave (b).