Analyse - Thuistentamen uitgebreid

7 april 2020, 17:30-19:30

– Onderteken na afloop van het tentamen de verklaring onderaan het tentamen en maak een scan in pdf formaat van de eigen uitwerkingen voorzien van je naam en studentnummer. Stuur de file in **pdf formaat** naar `s.m.verduynlunel@uu.nl`.

– Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.

– Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.

– Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, ga dan toch door met de volgende onderdelen. Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.

– Internet mag niet worden gebruikt.

Succes!

1. Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ met $f(0,0) = 0$ en met $f(x,y)$ voor $(x,y) \neq (0,0)$ gegeven door

$$f(x,y) := \frac{x^2 y}{x^2 + y^4}.$$

(a). Is f continu in $(0,0)$?

(b). Bestaan de partiële afgeleiden $D_1 f$ en $D_2 f$ in $(0,0)$?

2. Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in $\mathbb{R}$ zodat $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

(a). Bewijs dat de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een monotoon strikt stijgende deelrij heeft.

(b). Definieer de rij $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ door

$$b_n = \frac{a_n^2}{1 + a_n^2} \qquad \text{voor } n \in \mathbb{N}.$$

Bewijs dat de rij $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een convergente deelrij heeft.

3. Zij $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ een functie met de eigenschap dat

$$|g(x) - g(y)| \leq |x - y|, \qquad x, y \in \mathbb{Q}.$$

(a). Laat (a_n) een Cauchy rij in $\mathbb{Q}$. Bewijs dat $(g(a_n))$ een Cauchy rij is in $\mathbb{R}$.

(b). Zij $x \in \mathbb{R}$ en laat (a_n) en (b_n) rijen in $\mathbb{Q}$ zijn met limiet x in $\mathbb{R}$. Bewijs dat de rijen $(g(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ en $(g(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergeren in $\mathbb{R}$ met dezelfde limiet. Noem deze limiet $f(x)$ en definieer zo een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(c). Bewijs dat $f = g$ op $\mathbb{Q}$ en dat $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|, \qquad x, y \in \mathbb{R}$.

(d). Bewijs dat f continu is.

4. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een continue functie. Stel dat

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0 \qquad \text{voor iedere continue functie } g : [a, b] \to \mathbb{R}.$$

(a). Laat $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ een continue functie die niet identiek nul is zodat $h(x) \geq 0$ voor alle $x \in [a, b]$. Bewijs dat er $m > 0$ en $c, d \in [a, b]$ met $c < d$ bestaan zodat $h(x) \geq m$ voor alle $x \in [c, d]$.

(b). Bewijs dat f identiek nul is.

Hierbij verklaar ik dat ik de uitwerkingen van dit tentamen zelf heb gemaakt, zonder hulp van andere personen, internet of van andere hulpmiddelen dan het dictaat en eigen aantekeningen.

Naam Plaats

Normering:

1(a):15	2(a):10	3(a):10	4(a): 15
1(b):10	2(b):10	3(b):10	4(b): 10
		3(c):5	
		3(d):5	