Name: .... ID: ....

Examen Discrete Wiskunde 2018-2019
donderdag 11 april, 2019

- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Gebruik hiervoor de ruimte onder de vraag; er is in principe genoeg ruimte. Wanneer je een klein beetje ruimte te kort komt, dan kun je op de andere zijde onderaan doorschrijven (geef dit duidelijk aan); **je kunt ook een extra blad krijgen.** Schrijf op elk ingeleverd vel je naam en studentnummer.
- Wanneer u een bekende stelling wilt gebruiken, dan moet u die netjes formuleren; u hoeft hem niet te bewijzen.
- Wanneer u een algoritme wilt gebruiken, dan hoeft u alleen de naam van het algoritme te noemen en waarvoor u het wilt gebruiken. Er wordt een apart blaadje met algoritmen en stellingen uitgedeeld. U hoeft ook niet te bewijzen dat iets een groep is, indien u dit denkt nodig te hebben.
- Het is de bedoeling dat je ieder blaadje apart inlevert.
- Het examen omvat 6 opgaven met in totaal 16 (deel)opgaven.
- Vul ook de evaluatie in.
- De maximale score bedraagt (totaal 52 punten):
  - 2 punten op vragen 2b, 2c, 2d, 2e, 2f, 6a, 6b.
  - 4 punten op vragen 2a, 3a, 3b, 5a, 5b, 6c, 6d.
  - 5 punten op vragen 1, 4.
- Opgave 6d is een bonusopgave; deze is duidelijk lastiger.
- Wanneer gevraagd wordt om een probleem op een bepaalde manier op te lossen, dan wordt iedere andere manier volledig fout gerekend. Enumeratie levert eveneens niets op.
- Een rekenmachine is niet nodig en derhalve verboden. Eventuele rekenfouten worden met de mantel der liefde bedekt, tenzij het de spuigaten uitloopt.

Succes!

==

Uitloop voor vraag 1.

Opgave 1. Beschouw het hieronder gegeven netwerk. De getallen bij de pijlen geven respectievelijk de waarde van de huidige stroom door die pijl en de capaciteit van die pijl aan. Bepaal de maximale stroom door dit netwerk en bewijs de maximaliteit van deze stroom met behulp van een minimale snede. **Geef alle stappen van uw berekening duidelijk aan, inclusief residuele graaf. Het uitsluitend vermelden van de oplossing wordt niet goedgerekend**.

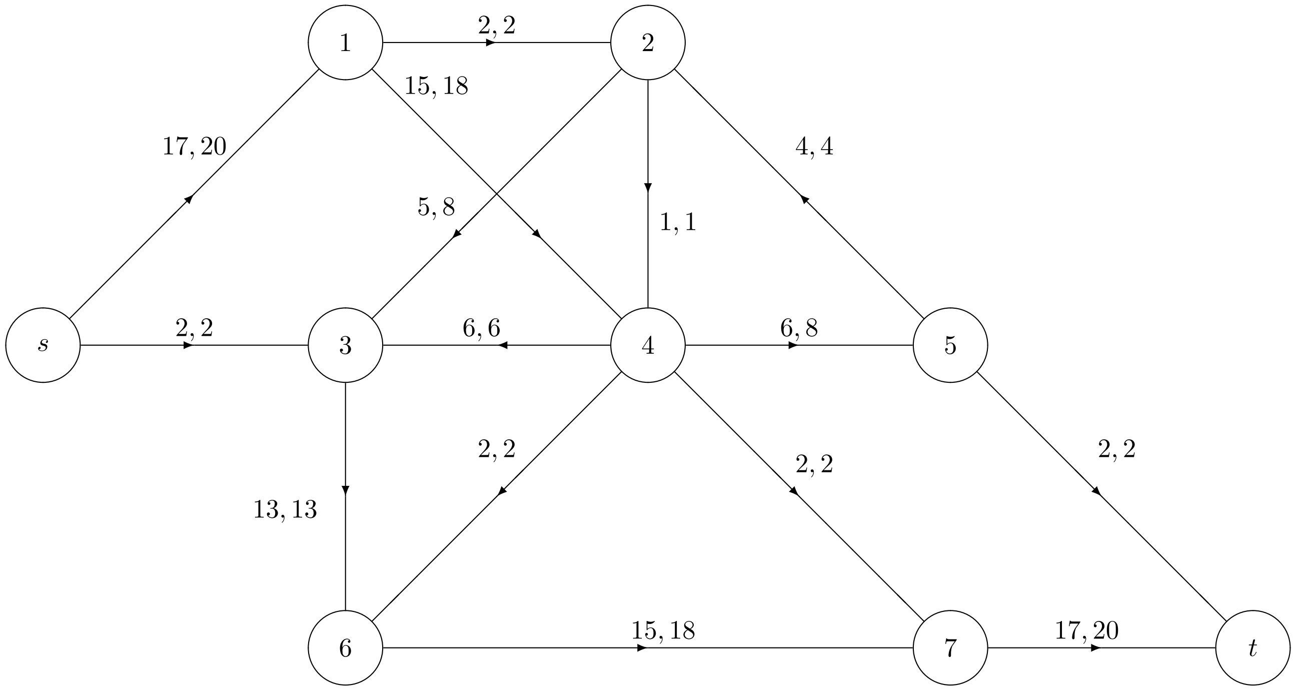

Figure 1: Netwerk

Indien nodig, ga door op de voorkant.

Name: .... ID: ....

Opgave 2. Gegeven is een ketting met $k = 6$ kralen; deze kralen kunnen drie kleuren krijgen: rood, blauw en wit. Op deze ketting kun je twee soorten permutaties uitvoeren: wel/niet omdraaien en met $0, 1, 2, 3, 4, 5$ plaatsen verschuiven.

(a) Geef de verschillende permutaties (denk eraan dat je ze bij (b) ook nog nodig hebt).

(b) Gegeven de gewichten $w(rood) = r$, $w(blauw) = b$ en $w(wit) = w$, bepaal de pattern inventory (je mag uiteraard machten van $(b + r + w)$ laten staan).

Gegeven de pattern inventory, definieer $Inve(w(rood), w(blauw), w(wit))$ als de waarde van de pattern inventory wanneer je getal $w(rood)$, enz. invoert (bijv. $Inve(2, 2, 2)$ geeft de waarde aan wanneer iedere kleur waarde 2 krijgt). Gebruik deze notatie hieronder. **Je moet bij (c), (d), (e), (f) aangeven hoe je het gevraagde aantal equivalentieklassen kunt bepalen; het antwoord zelf hoef je niet uit te rekenen**. Hierbij moet je zoveel mogelijk getallen gebruiken (en dus zo min mogelijk symbolen). **Motiveer uw antwoord**.

(c) Bepaal het aantal equivalentieklassen met precies drie blauwe kralen.

(d) Bepaal het aantal equivalentieklassen met minstens één rode en minstens één witte kraal.

(e) Bepaal het aantal equivalentieklassen met een even aantal blauwe kralen.

(f) Bepaal het aantal equivalentieklassen met een even aantal blauwe kralen, een oneven aantal rode en een oneven aantal witte kralen.

Ga indien nodig door op de achterkant.

Restant uitwerking opgave 2.

Opgave 3. Onderneemster A wil een handelsbedrijf opzetten; voorlopig handelt zij alleen in product X. In iedere periode t ($t = 1, \ldots, T$) probeert A vraag en aanbod op een zo gunstig mogelijke wijze op elkaar af te stemmen. Wat aanbod betreft heeft ze ruim keus. In iedere periode t ($t = 1, \ldots, T$) kan ze kiezen uit n aanbiedingen; aanbod i ($i = 1, \ldots, n$) betreft de aankoop van p_{it} eenheden tegen een prijs van in totaal c_{it} (dus niet per eenheid). Ze moet uit de verschillende aanbiedingen precies één aanbod kiezen per periode; dit mag iedere periode weer een ander aanbod zijn. De ingekochte hoeveelheid kan worden gebruikt om de verschillende klanten te beleveren; de totale vraag van de klanten in periode t bedraagt d_t eenheden, en dit levert q_t op per eenheid. Verder is het mogelijk om voorraad aan te houden; deze voorraad mag maximaal V eenheden bedragen, en het kost h per eenheid per periode. A begint met een beginvoorraad van 0 eenheden. De eindvoorraad kan gratis worden gedumpt. Verder geldt dat alle genoemde aantallen geheeltallig zijn.

(a) Neem aan dat er in iedere periode de volledige vraag moet worden beleverd. Geef een algoritme dat dit bovenstaande probleem optimaal oplost (waarbij dus de totale winst maximaal moet zijn).

(b) Stel dat het ook is toegestaan om na te leveren tot en met periode $T - 1$. De boete van een tekort wordt in natura verrekend: als je in periode t w eenheden te weinig hebt geleverd, dan moet je in periode $t + 1$ $2w$ eenheden leveren (die per stuk $q_t/2$ opleveren); deze nalevering moet in periode $t + 1$ plaatsvinden en mag niet worden uitgesteld. Geef een algoritme dat dit bovenstaande probleem optimaal oplost; u hoeft alleen aan te geven hoe het algoritme van (a) moet worden aangepast.

Ga indien nodig door op de achterkant.

Restant uitwerking opgave 3.

Opgave 4. Op het plaatselijke schoolplein kunnen de kinderen buiten schooltijd heerlijk spelen, maar er moet wel toezicht zijn in de vorm van precies één ouder (als er twee of meer ouders tegelijkertijd aanwezig zijn, dan gaan ze kletsen en wordt er niet opgelet). Om een rooster op te kunnen stellen voor de periode $[0, T]$ geeft iedere ouder zijn beschikbaarheid op in de vorm van een interval waarin hij/zij aanwezig kan zijn: voor iedere ouder j ($j = 1, \ldots, n$) levert dit interval $[a_j, b_j]$ op, met $a_j \geq 0$ en $b_j \leq T$. Het doel is om een planning te vinden zodanig dat op ieder tijdstip **precies één ouder** aanwezig is (overlap op de grens mag wel, dus $[1, 2]$ mag in combinatie met $[2, 5]$).

Helaas blijkt het niet iedere keer te lukken om een goede planning te vinden. Gelukkig is het mogelijk om één betaalde oppas (vanaf nu persoon X genoemd) in te huren die alle gaten in de planning voor zijn/haar rekening neemt. X is gedurende het hele interval $[0, T]$ beschikbaar, maar hij/zij gaat weg zodra één van de ouders komt oppassen. De kosten voor het inhuren van X bedragen voor ieder tijdsinterval q aan vaste kosten en c per tijdseenheid (dus als X in intervallen $[1, 2]$ en intervallen $[7, 9]$ oppast, dan kost dit $2q + 3c$). Het doel is nu om een planning te maken waarbij de kosten van X worden geminimaliseerd (het aantal ouders dat nodig is doet er niet meer toe). Geef aan hoe je dit probleem efficiënt op kunt lossen (dus slimmer dan door middel van enumeratie).

N.B. Houd er rekening mee dat de a_j, b_j waarden niet geheeltallig hoeven te zijn.

Ga indien nodig door op de achterkant.

Restant uitwerking opgave 4.

Opgave 5. Gegeven is een docente X die aan m klassen les moet geven; in totaal moet klas i ($i = 1, \ldots, m$) precies r_i uren les krijgen. De week is opgedeeld in T lesuren; een les moet in precies één lesuur worden gepland en neemt dan het hele uur in beslag. Voor ieder lesuur is bekend of de docente beschikbaar is en of klas i ($i = 1, \ldots, m$) beschikbaar is.

(a) Geef een efficiënt algoritme (dus veel slimmer dan door middel van volledige enumeratie) dat zoveel mogelijk lessen inplant. Geef aan hoe na afloop de oplossing kan worden afgeleid uit uw constructie, en waarom deze toegelaten is.

Helaas, het blijkt niet mogelijk om alle lessen te geven. Gelukkig is er nog een (onbevoegde) leerkracht Y die ook ingezet kan worden; van Y is bekend op welke uren hij aanwezig is. Het doel is het vinden van een toegelaten oplossing waarin iedere klas i precies r_i maal les krijgt en waarbij het aantal lessen dat Y geeft zo klein mogelijk is.

(b) Geef een efficiënt algoritme (dus veel slimmer dan door middel van volledige enumeratie) om dit probleem op te lossen. Geef aan hoe na afloop de oplossing kan worden afgeleid uit uw constructie, en waarom deze toegelaten is.

Ga indien nodig door op de achterkant.

Restant uitwerking opgave 5.

Opgave 6. Er is werk aan de winkel. Gegeven is een aantal van n klanten dat geholpen moet worden door één medewerker. Iedere klant j ($j = 1, \ldots, n$) heeft een interval $[b_j, e_j]$ gespecificieerd gedurende welke hij/zij beschikbaar is; verder is de tijdsduur p_j van iedere klus j ($j = 1, \ldots, n$) gegeven. Het is de bedoeling dat zo veel mogelijk klanten worden geholpen. Een klus moet zonder onderbreking worden uitgevoerd; klus j ($j = 1, \ldots, n$) mag niet starten voor tijdstip b_j en moet uiterlijk klaar zijn op tijdstip e_j. De medewerker is altijd beschikbaar. Noem dit probleem ZGMH (Zo Goed Mogelijke Hulp).

(a) Formueer de beslissingsvariant van het probleem ZGMH.

(b) Toon aan dat de beslissingsvariant van het probleem ZGMH tot de klasse $\mathcal{NP}$ behoort; hierbij hoeft u de polynomialiteit van uw claims niet aan te tonen.

(c) Toon aan dat het de beslissingsvariant van het probleem ZGMH $\mathcal{NP}$-volledig. U moet hierbij gebruiken dat het probleem Partitie $\mathcal{NP}$-volledig is. Formuleer de reductie en bewijs de correctheid ervan; u hoeft niet te bewijzen dat de reductie polynomiaal is. Het probleem Partitie is als volgt gedefinieerd: gegeven t niet-negatieve gehele getallen $a_1, \ldots, a_t$, bestaat er een deelverzameling S van de indexverzameling $\{1, \ldots, t\}$ waarvoor geldt

$$\sum_{j \in S} a_j = (\sum_{j=1}^{t} a_j)/2?$$

(d) Toon aan dat het niet waarschijnlijk is (dan geldt gelijkheid van de klassen $\mathcal{P}$ en $\mathcal{NP}$) dat er een algoritme bestaat dat in polynomiale tijd een oplossing vindt voor probleem ZGMH waarin ten hoogste 2 klanten minder worden bediend dan in een optimale oplossing.

Ga indien nodig door op de achterkant.

Restant uitwerking opgave 6.