Universiteit Utrecht
Betafaculteit

Examen Discrete Wiskunde II op donderdag 4 juli 2019, 13.30-16.30 uur.

- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Schrijf op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer.
- Een rekenmachine is niet nodig en derhalve verboden. Eventuele rekenfouten worden niet bestraft, tenzij het de spuigaten uitloopt (dit ter beoordeling van de nakijker).
- Het examen omvat 7 opgaven met in totaal 16 (deel)opgaven.
- Bij de opgaven hieronder **behalve Opgave 2** mag u er van uitgaan dat u een algoritme voor Max Flow, Min cost max flow, Kortste pad, Minimale Opspannende boom beschikbaar hebt. Wanneer u dit wilt toepassen hoeft u alleen aan te geven op welke instantie dit moet gebeuren.
- De maximale score per onderdeel bedraagt:
  - 2 punten voor ieder van de vragen 1b, 1c, 1d, 1e, 3c, 7a;
  - 3 punten voor onderdelen 1a, 1f;
  - 4 punten voor ieder van de vragen 2, 3a, 3b, 4, 5a, 5b, 6, 7b.

  Totaal 50 punten.

Succes!

==

Opgave 1.
Gegeven is een ketting met $k = 6$ kralen; deze kralen kunnen drie kleuren krijgen: rood, blauw en wit. Op deze ketting kun je twee soorten permutaties uitvoeren: wel/niet omdraaien en met $0, 1, 2, 3, 4, 5$ plaatsen verschuiven.

(a) Geef de verschillende permutaties (denk eraan dat je ze bij (b) ook nog nodig hebt).

(b) Gegeven de gewichten $w(rood) = r$, $w(blauw) = b$ en $w(wit) = w$, bepaal de pattern inventory (je mag uiteraard machten van $(b + r + w)$ laten staan).

Gegeven de pattern inventory, definieer $Inve(w(rood), w(blauw), w(wit))$ als de waarde van de pattern inventory wanneer je getal $w(rood)$, enz. invoert (bijv. $Inve(2, 2, 2)$ geeft de waarde aan wanneer iedere kleur waarde 2 krijgt). Bij de onderstaande vragen moet je aangeven hoe je het gewenste antwoord kunt bepalen door een goede waarde of symbool in te vullen voor $w(rood)$, $w(blauw)$ en $w(wit)$. Je hoeft het antwoord zelf niet uit te rekenen (mag wel). Je mag alleen getallen invullen voor $w(rood), w(blauw), w(wit)$, tenzij anders staat aangegeven. Enumeratie levert niets op en kost alleen tijd. **Motiveer steeds uw antwoord**.

(c) Bepaal het aantal equivalentieklassen met precies één witte kraal die meer blauwe dan rode kralen bevatten. Je mag hierbij maximaal 1 symbool gebruiken.

(d) Bepaal het aantal equivalentieklassen met minstens één rode en minstens één witte kraal.

(e) Bepaal het aantal equivalentieklassen met een even aantal blauwe kralen.

(f) Bepaal het aantal equivalentieklassen met een even aantal blauwe, een even aantal rode, en een even aantal witte kralen.

Opgave 2.
Beschouw het hieronder gegeven netwerk. De getallen bij de pijlen geven respectievelijk de waarde van de huidige stroom door die pijl en de capaciteit van die pijl aan. Bepaal de maximale stroom door dit netwerk en bewijs de maximaliteit van deze stroom met behulp van een minimale snede. **Geef alle stappen van uw berekening duidelijk aan, inclusief residuele graaf. Het niet vermelden van stappen kan tot aftrek van punten leiden**.

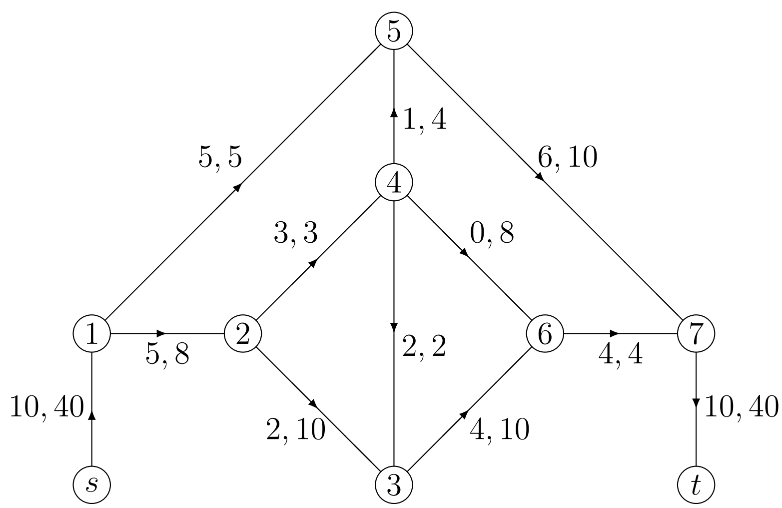

Figure 1: Netwerk.

Opgave 3.
Gegeven zijn n munten, die allemaal een verschillende, positieve, geheeltallige waarde w_j ($j = 1, \ldots, n$) hebben.

(a) Geef een algoritme dat op efficiënte wijze (dus beter dan volledige enumeratie) nagaat of het mogelijk is om een gegeven bedrag Q precies te betalen.

(b) Geef een algoritme dat op efficiënte wijze (dus beter dan volledige enumeratie) nagaat op hoeveel verschillende manieren je het bedrag Q precies kunt betalen.

(c) De ontvangende partij heeft ook nog k munten; nummer deze als munt j met $j = n+1, \ldots, n+k$. Noteer de positieve, geheeltallige waarde van munt j weer als w_j. Geef aan hoe je het algoritme van (a) moet aanpassen om te kijken of het mogelijk is om een bedrag van Q te bepalen waarbij de ontvangende partij, indien nodig, een bedrag terugbetaalt.

Opgave 4.
Bij het standaard Max Flow probleem geldt dat er een ondergrens is van 0 op de hoeveelheid stroom die door een pijl (i, j) (met $(i, j) \in A$) gaat (en een bovengrens c_{ij}, die de capaciteit aangeeft). In sommige gevallen is het handig om gebruik te maken van een positieve ondergrens l_{ij}. Het probleem wordt dan: vind een stroom van maximale omvang die aan de gebruikelijke eisen voldoet, waarbij voor de stroom x_{ij} door pijl (i, j) geldt $l_{ij} \leq x_{ij} \leq c_{ij}$ (voor alle $(i, j) \in A$).

Formuleer een algoritme dat in **polynomiale** tijd dit probleem oplost.

Opgave 5.
Vroeger was de thuiszorg simpel: de hulp kwam langs wanneer hij/zij tijd had (de patiënt was toch altijd thuis), hielp de patiënt, maakte een praatje, dronk een kop koffie en vertrok weer. Tegenwoordig is dit proces sterk gestroomlijnd: voor iedere patiënt is afgesproken wanneer hij/zij bezocht wordt, en wanneer de tijd verstreken is, dan moet de hulp er van door. Om dit proces robuust te plannen wordt uw hulp gevraagd. Van iedere klant j ($j = 1, \ldots, n$) is bekend gedurende welk interval deze geholpen moet worden (noteer dit als $[a_j, b_j]$, waarbij a_j de begintijd en b_j de eindtijd is). Verder is uiteraard bekend waar patiënt j zich bevindt (noteer dit als plaats v_j) en wat de reistijden zijn tussen ieder tweetal plaatsen v_i en v_j (noteer deze als d_{ij}).

Om deze patiënten te helpen is een groep van k hulpen beschikbaar. Deze zijn allemaal even bekwaam (het maakt dus niet uit welke hulp welke patiënt verzorgt). Ze beginnen allemaal op tijdstip 8.00 op de gemeenschappelijke verzamelplaats en komen na afloop van hun werkdag daar ook weer terug (om de administratie in orde te brengen). Bij de verzorging van patiënt j ($j = 1, \ldots, n$) is precies één hulp nodig gedurende de volledige periode $[a_j, b_j]$.

(a) Formuleer een algoritme dat in **polynomiale** tijd een toegelaten oplossing vindt waarin zoveel mogelijk patiënten worden geholpen.

(b) Gelukkig is men bezig om nieuwe hulpen op te leiden. Persoon X is zo'n stagair, en hij/zij kijkt een dagje mee bij interessante patiënten. Bepaal voor X een toegelaten schema met maximale opbrengst. De opbrengst van meekijken bij het helpen van patiënt j bedraagt c_j; X moet daar dan de gehele periode $[a_j, b_j]$ bij aanwezig zijn. U mag aannemen dat bij (a) een schema gevonden is waarin iedere patiënt wordt bezocht.

Opgave 6.
Gegeven is een datacentrum dat door middel van een netwerk is verbonden met een aantal klanten. Dit netwerk kan worden gemodelleerd als een gerichte samenhangende graaf G met puntenverzameling V en pijlenverzameling A; het datacentrum bevindt zich in het punt v_0. De klanten willen verbinding houden met het datacentrum, ook als een aantal kanten in het netwerk uitvallen. In dit verband wordt de betrouwbaarheid van een verbinding tussen een klant en het datacentrum gedefinieerd als het minimale aantal kanten dat moet worden weggelaten om de verbinding te verbreken. Geef aan hoe u de betrouwbaarheid van een verbinding kunt bepalen voor een gegeven klant, die zich in punt v_1 bevindt.

Opgave 7.
Gegeven is een graaf $G = (V, E)$; iedere kant $e \in E$ heeft een niet-negatieve geheeltallige lengte $c(e)$. We zoeken hierop een opspannende boom van minimale lengte, waarbij de graad van ieder punt maximaal gelijk is aan k, met $k = 3$. Noem dit het MST-3 probleem. De graad van een punt is gelijk aan het aantal kanten dat aan dat punt vastzit.

(a) Definieer de beslissingsvariant van MST-3, en geef aan welke voorwaarden u moet verifiëren om aan te tonen dat deze tot de klasse $\mathcal{NP}$ behoort; u hoeft deze verificatie niet uit te voeren.

(b) Laat zien dat de beslissingsvariant van MST-3 $\mathcal{NP}$-compleet is. Hierbij mag u gebruiken dat de problemen PARTITIE, HAMILTON-CYKEL en alle genoemde varianten van het HAMILTON-PAD probleem $\mathcal{NP}$-compleet zijn (zie definities verderop).

Indien het niet lukt met grens $k = 3$, dan kunt u ook nog punten verdienen door het gevraagde te bewijzen voor een andere waarde van k.

$\mathcal{NP}$-complete problemen

PARTITIE: Gegeven t gehele getallen $a_1, \ldots, a_t$, bestaat er een deelverzameling S van de indexverzameling $\{1, \ldots, t\}$ zodang dat

$$\sum_{j \in S} a_j = \sum_{j=1}^{t} a_j / 2?$$

HAMILTON-CYKEL: Gegeven een graaf $G' = (V', E')$, bevat deze graaf een tour die ieder punt $v \in V'$ precies éénmaal bezoekt?

HAMILTON-PAD: Gegeven een graaf $G' = (V', E')$, bevat deze graaf een pad dat ieder punt $v \in V'$ precies éénmaal bezoekt? Hierbij geldt dat het probleem $\mathcal{NP}$-compleet blijft indien één of twee eindpunten van het pad vooraf zijn gespecificeerd.