Universiteit Utrecht
Betafaculteit

Examen Discrete Wiskunde I op donderdag 4 juli 2019, 13.30-16.30 uur.

- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Schrijf op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer.
- Het examen omvat 12 opgaven met in totaal 15 (deel)opgaven.
- Op de vragen 1a, 1b, 4a en 6a kunnen maximaal 2 punten worden gescoord; op alle overige vragen kunnen maximaal 4 punten worden gescoord. Totaal 52 punten.
- Wanneer gevraagd wordt om een probleem op een bepaalde manier op te lossen, dan wordt iedere andere manier volledig fout gerekend. Enumeratie levert eveneens niets op.
- Een rekenmachine is niet nodig en derhalve verboden. Eventuele rekenfouten worden niet bestraft, tenzij het de spuigaten uitloopt (dit ter beoordeling van de nakijker).

Succes!

==

Opgave 1.
Op een nummerbord staan cijfers en/of letters; in totaal 6 stuks. Hierbij mogen alle cijfers 0 t/m 9 worden gebruikt (ook een combinatie met alleen nullen); van de 26 letters worden er 12 gebruikt.

(a) Bereken het aantal verschillende nummerborden dat mogelijk is.

(b) Gegeven dat er drie cijfers en drie letters gebruikt moeten worden, bereken het aantal verschillende nummerborden.

Opgave 2.
Gegeven is een standaard pak kaarten (van ieder van de vier kleuren Schoppen, Harten, Ruiten en Klaveren zijn er dertien kaarten). Hieruit worden willekeurig 13 kaarten getrokken; in vaktermen wordt dit een *hand* genoemd. Er wordt gezegd dat een hand een *renonce* bevat indien van één kleur geen enkele kaart aanwezig is. Bereken de kans hierop. U mag er bij de berekening vanuit gaan dat de kans dat de hand van twee (of zelfs drie) kleuren geen enkele kaart bevat 0 is.

Opgave 3
Drie personen (genaamd A, B, C) zijn omgekocht met 1000 identieke goudstukken; deze willen ze gaan verdelen. Omdat A belangrijker is dan B, en B belangrijker is dan C, moet A meer goudstukken ontvangen dan B en moet B meer goudstukken ontvangen dan C. **Geef een formule (zonder sommatie)** voor het aantal mogelijkheden om die goudstukken te verdelen, waarbij C eventueel niets krijgt.

Opgave 4
Een tafereeltje uit de jaren 50: een schoolklas gaat onder leiding van een leerkracht op schoolreisje. In de klas zitten 25 meisjes en 21 jongens. Ieder kind krijgt op volstrekt willekeurige wijze een nummer van 1 t/m 46 in de hand gedrukt. Daarna geeft ieder kind met nummer j ($j = 2, \ldots, 45$) de kinderen met nummers $j-1$ en $j+1$ een hand; de leerkracht geeft de kinderen met nummer 1 en met nummer 46 een hand, zodat er een kring wordt gevormd.

(a) Bereken de kans dat de leerkracht een jongen en een meisje een hand geeft. De uitkomst moet een getal (breuk) zijn zonder sommaties.

(b) De leerkracht stapt eruit, zodat een rij van 46 kinderen overblijft. Bereken de kans dat de rij bestaat uit 13 groepjes jongens en 12 groepjes meisjes (dus dat er op beide eindpunten van de rij een jongen staat en dat er precies 12 jongens met hun linkerhand de rechterhand van een meisje vasthouden.

Opgave 5.
Geef een combinatorisch bewijs voor de onderstaande relatie

$$\binom{n+k+1}{k+1} = \binom{n+k}{k} + \binom{n+k-1}{k} + \ldots + \binom{k}{k}$$

Opgave 6.
Los de onderstaande recurrente betrekkingen op met de JBF methode (karakteristieke vergelijking, particuliere oplossing, enz.). U mag eerder gevonden resultaten uiteraard hergebruiken. Bij (b) zijn de beginwaarden niet gegeven; hier hoeft u de constanten niet uit te rekenen.

$(a)\quad a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}\quad$ voor $n \geq 1$ met $a_0 = 1$ en $a_1 = 4$.

$(b)\quad a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 2 \cdot 2^n + n\quad$ voor $n \geq 2$ met a_0 en a_1.

Opgave 7.
Los de onderstaande recurrente betrekking op met behulp van een genererende functie.

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} - 2 \quad \text{voor } n \geq 2 \text{ met } a_0 = 2 \text{ en } a_1 = 5.$$

Opgave 8.
Bepaal het aantal gehele getallen n, met $1 \leq n \leq 1000$ dat tegelijkertijd aan de volgende eigenschappen voldoet:

1. n moet deelbaar zijn door 3.
2. n moet deelbaar zijn door 4, maar niet door 16.
3. n mag niet deelbaar zijn door 5.

Volledige enumeratie kost alleen tijd en levert geen punten op.

Opgave 9.
De functie $f(n)$ is gedefinieerd als

$$f(n) = (4 + \sqrt{13})^n + (4 - \sqrt{13})^n,$$

voor ieder niet-negatief geheel getal n. Toon aan dat $f(n)$ geheeltallig is voor ieder priemgetal $n \geq 3$.

Opgave 10
Op een verjaardagstaart staan n kaarsjes die de jarige moet uitblazen. De jarige heeft goed geoefend, en bij iedere keer blazen gaan er minstens twee kaarsjes uit; verder geldt dat als er k (met $k \geq 2$) kaarsjes branden, dan is de kans dat er precies j kaarsjes worden uitgeblazen gelijk aan $1/(k-1)$, voor $j = 2, \ldots, k$; wanneer er nog één kaarsje brandt, dan wordt dat zeker uitgeblazen. Bepaal het verwachte aantal malen dat de jarige moet blazen om alle kaarsjes uit te blazen.

De verwachte waarde van een stochast X die met kans $P(X = x)$ een waarde x kan aannemen is gelijk aan $\sum_{x \in S} x \cdot P(X = x)$, waarbij S de verzameling van waarden is die X kan aannemen; voor een gewone dobbelsteen vind je dan dat de verwachte waarde gelijk is aan $1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5$.

Opgave 11
Gegeven is een verzameling van 10 niet-negatieve, gehele getallen $a_1, \ldots, a_{10}$, waarbij geldt $a_i \leq 100$ $(i = 1, \ldots, 10)$. Toon aan dat het altijd mogelijk is om twee verschillende deelverzamelingen S en T van $\{1, \ldots, 10\}$ te vinden zodanig dat

$$\sum_{j \in S} a_j = \sum_{j \in T} a_j$$

Is het ook altijd mogelijk om twee disjuncte deelverzamelingen S en T te vinden?

Opgave 12
We zoeken het aantal triples (x, y, z) van niet-negatieve gehele getallen dat aan de volgende eisen voldoet:

- $x \leq y$,
- $x \leq z$,
- $16 \leq x + y + z \leq 18$.

Bereken het aantal mogelijke triples met behulp van een genererende functie; het gebruik van een genererende functie is verplicht.

Formules enz.

Inclusion-Exclusion

Stel dat er in totaal N objecten zijn. Ieder object kan r verschillende eigenschappen, $a_1, \ldots, a_r$, bezitten. Het aantal objecten dat eigenschappen $a_{i_1}, \ldots, a_{i_t}$ bezit (en mogelijk nog andere eigenschappen) wordt genoteerd met $N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$; met $s_t = \sum N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$ wordt aangegeven dat er wordt gesommeerd over iedere combinatie van t $(t = 0, \ldots, r)$ verschillende eigenschappen. Verder geeft $N(a'_1, \ldots, a'_r)$ het aantal van de N objecten aan die geen enkele van de r eigenschappen bezitten. Nu geldt

$$N(a'_1, \ldots, a'_r) = N - s_1 + s_2 + \ldots + (-1)^k s_k$$

Evenzo kun je het aantal elementen met precies m eigenschappen bepalen als

$$e_m = s_m - \binom{m+1}{1} s_{m+1} + \binom{m+2}{2} s_{m+2} + \ldots + (-1)^{r-m} \binom{m+r-m}{r-m} s_r.$$

Binomium

Het uitgebreide binomium van Newton is gedefinieerd als

$$(1+x)^u = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{u}{r} x^r,$$

waarbij

$$\binom{u}{r} = \begin{cases} \frac{u(u-1)\ldots(u-r+1)}{r!} & \text{als } r > 0 \\ 1 & \text{als } r = 0 \end{cases}$$

Toepassing van de regel levert bijv.

$$\frac{1}{(1-x)^p} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+p-1}{p-1} x^r.$$

Het aantal mogelijkheden om n genummerde ballen te verdelen over k onherkenbare dozen is het Stirling getal $S(n,k)$. Dit is gedefinieerd als

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$