Name: .... ID: ....

Examen Discrete Wiskunde 2018-2019
donderdag 7 maart, 2019

- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Gebruik hiervoor de ruimte onder de vraag; er is in principe genoeg ruimte. Wanneer je een klein beetje ruimte te kort komt, dan kun je op de andere zijde onderaan doorschrijven (geef dit duidelijk aan); je kunt ook een extra blad krijgen. Schrijf op elk ingeleverd vel je naam en studentnummer.
- Het is de bedoeling dat je ieder blaadje apart inlevert. Probeer het nietje met beleid (dus niet door te scheuren) te verwijderen.
- Het examen omvat 12 opgaven met in totaal 16 (deel)opgaven.
- Op de vragen 1a en 2 kunnen maximaal 3 punten worden gescoord; op alle overige vragen kunnen maximaal 4 punten worden gescoord. Totaal 62 punten.
- Wanneer gevraagd wordt om een probleem op een bepaalde manier op te lossen, dan wordt iedere andere manier volledig fout gerekend. Enumeratie levert eveneens niets op.
- Een rekenmachine is niet nodig en derhalve verboden. Eventuele rekenfouten worden met de mantel der liefde bedekt, tenzij het de spuigaten uitloopt.
- Wanneer je naar de WC wilt, dan moet je je smartphone inleveren (krijg je later weer terug).

Succes!

==

Uitloop voor vraag 1.

Name: .... ID: ....

Opgave 1. Los de onderstaande recurrente betrekkingen op met de JBF methode (karakteristieke vergelijking, particuliere oplossing, enz.). U mag eerder gevonden resultaten uiteraard hergebruiken.

$$(a) \quad a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad \text{voor } n \geq 2 \text{ met } a_0 = 1 \text{ en } a_1 = 6.$$

$$(b) \quad a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 4 * 3^n + 8n \quad \text{voor } n \geq 2 \text{ met } a_0 = 6 \text{ en } a_1 = 14.$$

Opgave 2. Gegeven is een standaard pak kaarten (van ieder van de vier kleuren Schoppen, Harten, Ruiten en Klaveren zijn er dertien kaarten). Hieruit worden willekeurig 13 kaarten getrokken. Geef een uitdrukking voor de kans dat de 13 kaarten zodanig zijn getrokken dat er één kleur (van de vier) is waar zes kaarten van worden getrokken, dat er één kleur is waarvan 3 kaarten worden getrokken, en dat van de overige twee kleuren er twee kaarten worden getrokken. De kans zelf hoef je niet uit te rekenen.

Opgave 3. Bepaal hoeveel tupels van gehele getallen (x_1, x_2, x_3, x_4) er bestaan zodanig dat $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 100$, waarbij x_1, x_2 oneven en x_3, x_4 even zijn en alle $x_i \geq 0$. De uitkomst moet een gesloten formule zonder sommatie zijn.

Opgave 4. Voor een vergadering worden verschillende verenigingen benaderd met het verzoek om twee personen af te vaardigen: de voorzitter en de penningmeester. Deze personen nemen plaats in een zaal met $n+1$ stoelen, die in een kring staan: één ervan is de stoel van de burgemeester, waarop altijd de burgemeester zit; de overige n stoelen zijn onherkenbaar. **N.B.** Vragen (a) t/m (d) kunnen los van elkaar worden gemaakt.

(a) Op de resterende n stoelen neemt een aantal besturen (bestaande uit twee personen) plaats. De beide bestuursleden van hetzelfde bestuur zitten naast elkaar; zo worden er $(k+1)$ groepjes gevormd (de burgemeester telt ook voor een groepje), waarbij er tussen ieder tweetal groepjes naast elkaar minstens één stoel vrij moet blijven. Definieer a_n als het aantal mogelijkheden om de besturen op de n onherkenbare stoelen plaats te laten nemen. Het aantal besturen dat komt is dus niet van te voren bekend (het kan zelfs 0 zijn); het is alleen bekend dat de burgemeester zeker op zijn stoel zit. Geef een recurrente betrekking voor a_n. U hoeft de beginwaarden niet te berekenen.

(b) Het blijkt dat er precies k besturen op komen dagen (naast de burgemeester). Deze $2k$ mensen gaan zitten, zoals beschreven bij (a); n en k zijn zodanig dat dit past. Nadat iedereen heeft plaats genomen zijn er nog m stoelen over). Geef een uitdrukking voor het aantal mogelijke manieren waarop ze kunnen gaan zitten, waarin geen sommatie voorkomt; bewijs de correctheid ervan. Neem hierbij aan dat deze $2k$ mensen onherkenbaar zijn.

(c) Voor de gezelligheid wil men de afstand tussen de besturen zo gelijk mogelijk verdelen. Helaas is m niet zodanig dat het mogelijk is precies evenveel vrije stoelen tussen ieder van de $k+1$ groepjes mensen (de burgemeester geldt ook als een groepje) te plaatsen, maar men verdeelt het zo gelijkmatig mogelijk. Op hoeveel manieren is dit mogelijk? Geef een uitdrukking hiervoor waarin geen sommatie voorkomt, en bewijs de correctheid ervan.

(d) Ga er nu vanuit dat de besturen die bij (b) op de stoelen gingen zitten wel herkenbaar zijn. Er blijken nog wat kleine conflicten te spelen; daarom is het beter dat de besturen van de verenigingen 1 en 2 niet naast elkaar gaan zitten; hetzelfde geldt voor de besturen van de verenigingen 3 en 4. Hierbij wordt met niet naast elkaar bedoeld dat er minstens één persoon (dit kan de burgemeester zijn, maar ieder ander is ook goed) tussen twee van de betrokken besturen moet zitten. Het gaat nu om het aantal mogelijkheden om de besturen te laten plaatsnemen, waarbij aan deze extra voorwaarden en aan de voorwaarden van (b) is voldaan neer te zetten kunt berekenen voor deze extra voorwaarde. Geef aan hoe je dit aantal kunt bepalen. Mocht je het antwoord bij (b) niet hebben kunnen bepalen en dit wel nodig te hebben, dan mag u hiervoor $f(n,k)$ gebruiken. Neem aan dat de voorzitter en de penningmeester van hetzelfde bestuur onherkenbaar zijn.

Ga indien nodig door op de achterkant.

Restant uitwerking opgave 4.

Opgave 5. De functie $g(n)$ is gedefinieerd als $g(n) = 2^n + n2^n + 2n + 1$. Bepaal een recurrente betrekking (er zijn verschillende mogelijkheden) van de vorm

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + f(n),$$

waarvoor geldt dat $g(n)$ een oplossing van deze recurrente betrekking is voor alle $n \geq 2$; hierbij moet gelden $c_1 \neq 0$ en $c_2 \neq 0$. U hoeft a_0 en a_1 niet te berekenen.

Opgave 6. Bewijs de onderstaande gelijkheid, met $|x| < 0,1$ (die 0,1 is willekeurig gekozen, maar klein genoeg om vervelende effecten te voorkomen); u mag kiezen voor een combinatorisch of voor een algebraïsch bewijs

$$\frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor x^k$$

Opgave 7. Geef een **combinatorisch bewijs** van de onderstaande gelijkheid. Ieder ander bewijs levert geen punten op en kost alleen maar tijd.

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Opgave 8. Een persoon X gaat voor een firma werken; X begint op dag 1 (dat is een maandag) en werkt gedurende één jaar (365 dagen). Van de officiële regels betreffende feestdagen wordt afgeweken; in plaats daarvan worden de volgende afspraken gemaakt (in volgorde van belangrijkheid)

1. De werknemer heeft altijd de elfde dag vrij (dus dag 11, 22, enz. zijn hoe dan ook vrij).
2. De werknemer heeft altijd de dertiende dag vrij (dus dag 13, 26, enz. zijn hoe dan ook vrij).
3. De werknemer heeft iedere vierde zondag vrij (dus hij heeft de vierde, achtste, enz. zondag vrij; op de resterende zondagen moet hij werken, tenzij hij op grond van de eerste twee regels vrij heeft).

Na afloop van dit jaar wil X weten hoeveel hij heeft verdiend. Voor een 'gewone' werkdag verdient X 100 euro, en voor een gewerkte zondag 200 euro. Bereken zijn verdiensten. Enumeratie kost alleen tijd en levert niets op.

Opgave 9. Gegeven is een (8×8) schaakbord waarop 33 torens staan. Bewijs dat het altijd mogelijk is om 5 torens te kiezen die elkaar niet kunnen slaan (dus allemaal in een andere rij en in een andere kolom staan).

Opgave 10. Los de onderstaande recurrente betrekking op.

$$\frac{(n+3)}{n+5}a_n = \frac{(n+1)}{(n+3)}a_{n-1} + 2(n+4) \quad \text{voor } n \geq 1 \text{ met } a_0 = 20.$$

Opgave 11. Los de onderstaande recurrente betrekking op **met behulp van een genererende functie.** Als je extra ruimte nodig hebt, ga dan door op de achterkant.

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2 \quad \text{voor } n \geq 2 \text{ met } a_0 = 2 \text{ en } a_1 = 1.$$

Ga indien nodig door op de achterkant.

Restant uitwerking opgave 11.

Opgave 12. Bij de attractie "blikjes gooien" op de kermis staan n blikjes opgesteld, waarop je net zolang mag gooien tot ze om zijn. Persoon X heeft zijn gooivaardigheden geanalyseerd: met kans $0,5$ gooit hij mis, en met kans $0,5$ gooit hij minstens één blikje om: als er nog k blikjes staan, dan is er een kans van $\frac{1}{2k}$ dat hij er j stuks omgooit (met $j = 1, \ldots, k$). Bepaal het **verwachte aantal** keren dat X moet gooien om alles om te krijgen. U mag hierbij gebruiken dat het verwachte aantal keren dat je moet gooien om één blikje om te krijgen gelijk is aan 2.

De verwachte waarde $E(X)$ van een discreet verdeelde stochast X is gelijk aan $\sum_q qP(q)$, waarbij $P(q)$ de kans is op uitkomstwaarde q. Bij een dobbelsteen bijv. is het verwachte aantal ogen gelijk aan $1 * 1/6 + 2 * 1/6 + \ldots + 6 * 1/6 = 3,5$, want de kans op q ogen is $1/6$ voor $q = 1, \ldots, 6$.

Formules enz.

Inclusion-Exclusion
Stel dat er in totaal N objecten zijn. Ieder object kan r verschillende eigenschappen, $a_1, \ldots, a_r$, bezitten. Het aantal objecten dat eigenschappen $a_{i_1}, \ldots, a_{i_t}$ bezit (en mogelijk nog andere eigenschappen) wordt genoteerd met $N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$; met $s_t = \sum N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$ wordt aangegeven dat er wordt gesommeerd over iedere combinatie van t ($t = 1, \ldots, r$) verschillende eigenschappen. Verder geeft $N(a'_1, \ldots, a'_r)$ het aantal van de N objecten aan die geen enkele van de r eigenschappen bezitten. Nu geldt

$$N(a'_1, \ldots, a'_r) = N - s_1 + s_2 + \ldots + (-1)^r s_r = N + \sum_{t=1}^{r} (-1)^t s_t$$

Het aantal objecten met precies m eigenschappen is gelijk aan

$$e_m = \sum_{t=0}^{r-m} (-1)^t \binom{m+t}{t} s_{m+t}$$

Binomium
Het uitgebreide binomium van Newton is gedefinieerd als

$$(1+x)^u = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{u}{r} x^r,$$

waarbij

$$\binom{u}{r} = \begin{cases} \frac{u(u-1)\ldots(u-r+1)}{r!} & \text{als } r > 0 \\ 1 & \text{als } r = 0 \end{cases}$$

Toepassing van de regel levert bijv.

$$\frac{1}{(1-x)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+p-1}{p-1} x^k.$$

Het aantal mogelijkheden om n genummerde ballen te verdelen over k onherkenbare dozen is het Stirling getal

$S(n,k)$. Dit is gedefinieerd als

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$