Herkansingstentamen Grondslagen van de Wiskunde, 17 april 2019, 09.00-12.00

Dit tentamen bevat 5 opgaven; zie ook de ommezijde.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. Voor deelverzamelingen A van $\mathbb{N}^2$ hebben we de twee projecties:

$$\begin{aligned} \pi_1 A &= \{n \mid (n,m) \in A\} \\ \pi_2 A &= \{m \mid (n,m) \in A\} \end{aligned}$$

Bepaal van elk van onderstaande verzamelingen of deze eindig, aftelbaar oneindig of overaftelbaar is. Motiveer je antwoord kort.

a) (4) $\mathcal{A}_1 = \{A \subseteq \mathbb{N}^2 \mid \pi_1 A \text{ en } \pi_2 A \text{ zijn eindig}\}$

b) (3) $\mathcal{A}_2 = \{A \subseteq \mathbb{N}^2 \mid |\pi_1 A| = 1\}$

c) (3) $\mathcal{A}_3 = \{A \subseteq \mathbb{N}^2 \mid \pi_1 A = \{0,1\}\}$

Opgave 2. Een ongerichte, simpele graaf is een verzameling X met daarop een symmetrische, reflexieve relatie R (dus als $(x,y) \in R$ dan ook $(y,x) \in R$, en altijd $(x,x) \in R$). Als (X,R) zo'n graaf is en $x,y \in X$ dan is een *pad tussen x en y* een rijtje

$$x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$$

waarvoor geldt dat $(x_i, x_{i+1}) \in R$ voor alle i, $0 \leq i < n$.

a) (5) Bewijs: voor elke ongerichte, simpele graaf (X,R) is er een deelverzameling A van X waarvoor geldt: voor elke $x \in X$ is er precies één $a \in A$ zodat er een pad is tussen a en x.

b) (5) Bewijs dat uit de bewering in a) het Keuze-axioma volgt. [Hint: gegeven een surjectieve functie $f : Y \to Z$, definieer een geschikte graaf-relatie op Y zodat voor een deelverzameling A van Y als in a) geldt, dat $f : A \to Z$ een bijectie is.]

Opgave 3. In een lineaire ordening $(L, <)$ heten $a, b \in L$ *ver uit elkaar* als $a < b$ en $\{x \in L \mid a \leq x \leq b\}$ oneindig is. Laat $\mathcal{L} = \{<\}$ de taal van posets zijn. In deze opgave laten we zien dat er geen $\mathcal{L}$-theorie bestaat waarvan de modellen precies die lineaire ordeningen zijn waarin ver uit elkaar liggende elementen bestaan.

Stel, zo'n $\mathcal{L}$-theorie T bestaat.

a) (5) Zij $T_{\mathbb{N}}$ de verzameling $\mathcal{L}$-zinnen die waar zijn in $\mathbb{N}$ (met de gewone ordening). Bewijs dat $T \cup T_{\mathbb{N}}$ consistent is. [Hint: laat met behulp van de Compactheidsstelling zien dat $T_{\mathbb{N}}$ een model heeft met "niet-standaard elementen".]

b) (3) Leid uit a) af dat $T \subseteq T_{\mathbb{N}}$.

c) (2) Concludeer tot een tegenspraak met de aanname die we gedaan hebben.

Opgave 4. Voor elk van onderstaande uitspraken is de opgave: geef een bewijs (met natuurlijke deductie) of een tegenmodel.

a) (4) $\exists x R(x) \vdash \exists x \forall y (y = x \rightarrow R(y))$

b) (3) $\exists x R(x) \vdash \exists x \forall y (y = x \leftrightarrow R(y))$

c) (3) $\forall x S(x, f(x)) \vdash \forall x \exists y \exists z (S(x, y) \wedge S(y, z))$

Opgave 5: Ik herinner eraan dat een verzameling x *transitief* is als voor alle $y \in x$ en $z \in y$ geldt, dat $z \in x$. Voor elke verzameling x is er een kleinste transitieve verzameling $T(x)$ (de *transitieve afsluiting* van x) zodat $x \subseteq T(x)$: $T(x) = \bigcup_{n \in \omega} T_n(x)$ waar $T_0(x) = x$ en $T_{n+1}(x) = \bigcup T_n(x)$.

a) (5) Bewijs: als x een verzameling van ordinaalgetallen is, dan is $T(x)$ een ordinaalgetal.

b) (5) Laat zien dat de aanname in deeltje a) niet gemist kan worden.