Tentamen Grondslagen van de Wiskunde A

19 december 2018, 09:00–12:00

DIT TENTAMEN BEVAT 5 OPGAVEN; ZIE OOK DE OMMEZIJDE.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. We definiëren de volgende relatie op de machtsverzameling van $\mathbb{R}$: voor $A, B \subseteq \mathbb{R}$ geldt $A \sim B$ precies als $(A \cup B) - (A \cap B)$ aftelbaar is.

a) (4) Laat zien dat $\sim$ een equivalentierelatie is.

b) (3) Bepaal de kardinaliteit van elke equivalentieklasse.

c) (3) Bepaal de kardinaliteit van de verzameling equivalentieklassen.

Opgave 2. Voor functies $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ schrijven we $\min(f, g)$ voor de functie h waarvoor geldt:

$$h(x) \;=\; \min(f(x), g(x)) \quad (x \in \mathbb{R})$$

a) (5) Bewijs met behulp van het Lemma van Zorn dat er een deelverzameling $\mathcal{A}$ van $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ is die maximaal is met betrekking tot de eigenschap: als $f, g \in \mathcal{A}$ en $f \neq g$, dan $\min(f, g) \notin \mathcal{A}$.

b) (5) Laat $\mathcal{A}$ zijn als in deeltje a). Laat zien dat voor alle $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ het volgende geldt: hetzij $f \in \mathcal{A}$, hetzij er is een $g \in \mathcal{A}$ zodat $f(x) \leq g(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, hetzij er is een $g \in \mathcal{A}$ zodat $g(x) \leq f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Opgave 3. Laat $L = \{\leq\}$ de taal van posets zijn. Voor een welordening M geven we met M_l de verzameling limietelementen van M aan; M_l is geordend als deelverzameling van M.

a) (3) Laat zien dat M_l een welordening is.

b) (4) Geef een L-formule $\phi_l(x)$ in één vrije variabele x, zodat voor elke welordening M en elke $a \in M$ geldt:

$$M \models \phi_l(a) \;\Leftrightarrow\; a \in M_l$$

c) (3) Geef een L-formule $\phi_{ll}(x)$ in één vrije variabele x, zodat voor elke welordening M en elke $a \in M$ geldt:

$$M \models \phi_{ll}(a) \;\Leftrightarrow\; a \in (M_l)_l$$

[Hint: hierbij mag je de formule ϕ_l uit deeltje b) gebruiken.]

Opgave 4. We beschouwen weer de taal $L = \{\leq\}$ van posets.

a) (5) Geef een L-formule $\phi(x)$ in één vrije variabele x die voldoet aan:

  i) Voor minstens één poset P geldt $P \models \exists x \phi(x)$.

  ii) Voor elke poset P en elke $p \in P$ geldt: als $P \models \phi(p)$, dan is de verzameling $\{y \in P \mid y \leq p\}$ oneindig.

b) (5) Geef een L-zin ψ die waar is in minstens één poset, en zodat elke poset die model is van ψ, oneindig is.

Opgave 5.Voor een verzameling A en een binaire relatie R op A definiëren we de *transitieve afsluiting* $\overline{R}$ van R als de kleinste transitieve relatie op A die R bevat. Dat wil zeggen, er geldt $(a, b) \in \overline{R}$ precies als er een $n > 0$ en $a_0, a_1, \ldots, a_n \in A$ bestaan zodat $a_0 = a$, $a_n = b$ en $(a_i, a_{i+1}) \in R$ voor $0 \leq i < n$.

Bekijk nu de taal L met twee constanten c en d, en een 2-plaatsig relatiesymbool R.

a) (4) Geef een L-theorie T zodat voor alle L-structuren M geldt: $M \models T$ dan en slechts dan als $(c^M, d^M) \notin \overline{R^M}$.

b) (6) Bewijs dat er geen L-zin φ bestaat zodat voor alle L-structuren M geldt dat $M \models \varphi$ dan en slechts dan als $(c^M, d^M) \notin \overline{R^M}$. [Hint: stel dat zo'n φ wel bestaat, en pas de Compactheidsstelling toe op de theorie $T \cup \{\neg\varphi\}$.]