F. Ziltener

blok 1, 2018/ 2019
3 januari 2019

Maat en integratie

Hertentamen

achternaam: ______________________ voornaam: ______________________

studentnummer: ____

Alsjeblieft:

- Zet je mobiele telefoon uit en leg hem in je tas.
- Schrijf met een blauwe of zwarte pen, **niet** met een groene of rode pen, noch met een potlood.
- Schrijf je naam op elk vel.
- Lever dit voorblad ook in.
- Lever maar één oplossing voor elk probleem in.

Het tentamen duurt 180 minuten.

Boeken, cursusmateriaal en rekenmachines mogen niet gebruikt worden, maar het is toegestaan om één vel papier (A4-formaat, voor- en achterkant) met eigen aantekeningen te gebruiken. Deze moeten handgeschreven zijn.

Tenzij anders aangegeven, mag je ieder resultaat ((hulp-)stelling, propositie of gevolg) gebruiken dat in het hoorcollege of in het boek van Cohn is bewezen, zonder het opnieuw te bewijzen.

Als een tentamenopgave (deel van) een resultaat X in het hoorcollege of in het boek was dan wordt verwacht dat je de uitspraak herbewijst. Tenzij anders aangegeven, mag je elk resultaat gebruiken dat in het bewijs van X werd gebruikt, zonder het te bewijzen.

Tenzij anders aangegeven, mag je het volgende zonder bewijs gebruiken:
Elke eigenlijk Riemann-integreerbare functie is Lebesgue-integreerbaar en de twee integralen komen overeen. (Zo'n functie is gedefinieerd op een begrensd interval.)

Bewijs elke andere uitspraak die je doet. Rechtvaardig je berekeningen. Ga na dat aan de voorwaarden van de stellingen die je gebruikt is voldaan.

24 punten zijn voldoende voor een cijfer 6.

Succes!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$
/4	/4	/4	/7	/3	/5	/4	/5	/4	/5	/45

Opgave 1 (σ-algebra, 4 pt)**.** Zij X en X' verzamelingen, $f : X \to X'$ een afbeelding en $\mathcal{A}'$ een σ-algebra op X'. Toon aan dat de collectie

$$\left\{f^{-1}(A') \,\middle|\, A' \in \mathcal{A}'\right\}$$

een σ-algebra op X is.

Opgave 2 (maat van doorsnede van dalende rij, 4 pt)**.** Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte en $(A_i)_{i \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,\ldots\}}$ een dalende rij van verzamelingen in $\mathcal{A}$. Stel dat er een $n \in \mathbb{N}_0$ bestaat zó, dat $\mu(A_n) < \infty$. Toon aan dat

$$\mu\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}_0} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i). \tag{1}$$

Opmerking: In het hoorcollege is een soortgelijke uitspraak voor een stijgende rij van verzamelingen bewezen. Je mag deze uitspraak zonder bewijs gebruiken.

Opgave 3 (Lebesguemeetbaarheid en -maat, 4 pt)**.** Zij $A \subseteq \mathbb{R}^d$ en $v \in \mathbb{R}^d$. Toon het volgende aan:

(i)
$$\lambda_d^*(A + v) = \lambda_d^*(A),$$
waarbij λ_d^* de d-dimensionale uitwendige Lebesguemaat aanduidt.

(ii) A is Lebesguemeetbaar dan en slechts dan als $A + v$ Lebesguemeetbaar is.

Uitspraak (i) was een propositie in het hoorcollege. Je wordt gevraagd om deze propositie opnieuw te bewijzen.

Opgave 4 (vervollediging van een maatruimte, 7 pt)**.** Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte. We definiëren

$$\overline{\mathcal{A}} := \left\{A \cup S \,\middle|\, A \in \mathcal{A},\, S \text{ deelverzameling van een } \mu\text{-nulverzameling}\right\},$$
$$\overline{\mu}\colon \overline{\mathcal{A}} \to [0, \infty], \quad \overline{\mu}(\overline{A}) := \mu(A),$$

waarbij $A \in \mathcal{A}$ en S een deelverzameling van een μ-nulverzameling is zó, dat

$$\overline{A} = A \cup S.$$

Bewijs het volgende:

(i) $\overline{\mu}$ is een maat.

(ii) $\overline{\mu}$ is volledig.

Opmerking: Je mag zonder bewijs gebruiken dat $\overline{\mathcal{A}}$ een σ-algebra is en dat $\overline{\mu}(\overline{A})$ goed gedefinieerd is.

Opgave 5 (limiet van integralen, 3 pt)**.** Bereken de limiet

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \left(\frac{1 + x^2}{1 + x}\right)^{\frac{1}{n}} dx.$$

Rechtvaardig je berekening.

(Z.o.z.)

Opgave 6 (Lebesgue-integreerbare functie met oneindig veel singulariteiten, 5 pt)**.** Bewijs dat er een functie $f : (0,1) \to [0,\infty]$ bestaat die integreerbaar is m.b.t. de Lebesguemaat, zó, dat voor elke nietlege open deelverzameling $U \subseteq (0,1)$ en elke $C \in \mathbb{R}$ de verzameling

$$\big\{x \in U \,\big|\, f(x) > C\big\}$$

positieve Lebesguemaat heeft.

Opgave 7 (afschatting voor integraal, 4 pt)**.** Toon aan dat

$$\int_0^\infty \left(e^{-\frac{x}{8}} + e^{-\frac{x^9}{72}} x\right)^8 dx \leq 2^8.$$

Opmerking: Je hoeft niet te bewijzen dat de integrand meetbaar is.
Tip: Gebruik een ongelijkheid uit het hoorcollege.

Opgave 8 ($|\cdot|_\infty$ is een semi-norm, 5 pt)**.** Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte. We definiëren

$$\begin{gathered}
\mathcal{M}(\mathcal{A}) := \big\{f : X \to \mathbb{R} \,\big|\, f \text{ is } \mathcal{A}\text{-meetbaar}\big\}, \\
p : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \to [0,\infty], \quad p(f) := \inf\big\{c \in [0,\infty] \,\big|\, |f| \leq c\,\mu\text{-bijna overal}\big\}, \\
\mathcal{L}^\infty(\mu) := p^{-1}([0,\infty)), \\
|\cdot|_\infty := \text{beperking van } p \text{ op } \mathcal{L}^\infty(\mu).
\end{gathered}$$

Toon het volgende aan:

(i) $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ is een lineaire deelruimte van $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

(ii) $|\cdot|_\infty$ is een semi-norm.

Opmerking: Je hoeft niet te bewijzen dat $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^X$ is.

Opgave 9 (convergentie bijna overal en $|\cdot|_1$-convergentie, 4 pt)**.** Zij $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ een rij van functies van $(0,1)$ naar $\mathbb{R}$ die integreerbaar zijn m.b.t. de Lebesguemaat op $(0,1)$. Stel dat (f_i) puntsgewijs convergeert. Convergeert (f_i) dan m.b.t. de 1-seminorm $|\cdot|_1$?

Opgave 10 (productmaat van gebied onder grafiek, 5 pt)**.** Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een σ-eindige maatruimte, $f\colon X \to [0,\infty)$ en

$$S := \big\{(x,y) \in X \times [0,\infty) \,\big|\, y \leq f(x)\big\}.$$

Stel dat S in de product-σ-algebra van $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}_{\lambda_1^*}$ ligt. ($\mathcal{A}_{\lambda_1^*} := \big\{$Lebesgue-meetbare deelverzamelingen van $\mathbb{R}\big\}$) Toon het volgende aan:

(i) f is $\mathcal{A}$-meetbaar. De functie $\mathbb{R} \ni y \mapsto \mu\left(f^{-1}\big([y,\infty)\big)\right) \in \mathbb{R}$ is $\mathcal{A}_{\lambda_1^*}$-meetbaar.

(ii)

$$\int f\,d\mu = \int_{[0,\infty)} \mu\left(f^{-1}\big([y,\infty)\big)\right)\, d\lambda_1(y).$$