Docent: Yu.A. Kuznetsov
Assistants: T. Gomez, D. Engl
R. Stegeman, P. van Dieten

UITWERKING TENTAMEN DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WISB231)

11 april 2019, 13:30-16:30 uur

Opgave 1 [20 pt] Zij $I = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ en zij functies $u_{1,2} : I \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$u_1(x) := x \quad \text{en} \quad u_2(x) := \frac{1}{x} \ .$$

(a) [10 pt] Vind twee functies $a_{1,2} : I \to \mathbb{R}$ zo dat $\{u_1, u_2\}$ een basis is van de oplossingsruimte van de lineaire differentiaalvergelijking

$$u'' + a_1(x)u' + a_2(x)u \ = \ 0, \quad x \in I. \tag{1}$$

Methode I: De functies u_1 en u_2 zijn lineair onafhankelijk en voldoen op I aan de vergelijking (1). Dus, voor $x \in I$ moet gelden dat

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & a_1(x) & + & a_2(x)x & = & 0, \\ \dfrac{2}{x^3} & - & a_1(x)\dfrac{1}{x^2} & + & a_2(x)\dfrac{1}{x} & = & 0, \end{array} \right.$$

ofwel

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} a_1(x) & + & a_2(x)x & = & 0 \ , \\ a_1(x) & - & a_2(x)x & = & \dfrac{2}{x} \ . \end{array} \right.$$

Dit is een lineair niet-singulier stelsel voor $(a_1(x), a_2(x))$ met de unieke oplossing

$$a_1(x) = \frac{1}{x}, \quad a_2(x) = -\frac{1}{x^2} \ .$$

Methode II: Schrijf $u_{1,2}(x) = x^{r_{1,2}}$ met $r_{1,2} = \pm 1$. De machten $r_{1,2}$ zijn de wortels van de kwadratische vergelijking

$$r^2 - 1 = 0$$

ofwel

$$r^2 + (1 - \alpha)r + \beta = 0$$

met $\alpha = 1$ en $\beta = -1$. Hieruit volgt dat $u_{1,2}(x)$ twee lineair-onafhenkelijke oplossingen zijn van de Euler-vergelijking:

$$y'' + \frac{\alpha}{x}y' + \frac{\beta}{x^2}y \ = \ y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y \ = = 0, \quad x > 0.$$

Dus

$$a_1(x) = \frac{1}{x}, \quad a_2(x) = -\frac{1}{x^2} \ .$$

(b) [10 pt] Bereken een oplossing van het inhomogene randwaardeprobleem

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y & = & \dfrac{1}{x^2} \ , \quad x \in [1, 2], \\ y(1) & = & 0, \\ y(2) & = & 0. \end{array} \right. \tag{2}$$

Een evidente speciale oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking

$$\eta'' + \frac{1}{x}\eta' - \frac{1}{x^2}\eta = \frac{1}{x^2}$$

is de constante functie $\eta(x) = -1, \quad x \in I$. De algemene oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking in (2) is gegeven door

$$y(x) \;=\; Au_1(x) + Bu_2(x) + \eta(x) \;=\; Ax + \frac{B}{x} - 1, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

De homogene randvoorwaarden $y(1) = y(2) = 0$ in (2) zijn equivalent met het niet-singulier stelsel van twee lineaire algebraische vergelijkingen

$$\begin{cases} A & + & B & = & 1, \\ 4A & + & B & = & 2, \end{cases}$$

met de eenduidige oplossing $A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{2}{3}$. Het raandwaardeprobleem (2) heeft dus de unieke oplossing

$$y(x) \;=\; \frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{x}\right) - 1.$$

Opgave 2 [40 pt] Bereken e^{xA} voor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

De karakteristieke vergelijking van A is

$$\det(A - \lambda E) \;=\; (\lambda - 1)^4 \;=\; 0$$

met één viervoudige wortel $\lambda = 1$. De matrix A heeft dus één eigenwaarde $\lambda = 1$ met de algebraische multipliciteit $m = 4$. Voor de matrix

$$B := A - E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

geldt

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad B^3 = 0.$$

Dus is B nilpotent met de nilpotentiegraad 3. Hieruit volgt dat

$$e^{xA} = e^{x(E+B)} = e^x e^{xB} = e^x \left(E + xB + \frac{x^2}{2}B^2\right)$$

ofwel

$$e^{xA} = e^x \begin{pmatrix} 1 & -x - \frac{x^2}{2} & -2x - \frac{x^2}{2} & 3x + x^2 \\ 0 & 1 - x - \frac{x^2}{2} & -2x - \frac{x^2}{2} & 3x + x^2 \\ 0 & x - \frac{x^2}{2} & 1 - \frac{x^2}{2} & -x + x^2 \\ 0 & -\frac{x^{2\;x}}{2} & -x - \frac{x^2}{2} & 1 + x + x^2 \end{pmatrix}.$$

Opgave 3 [40 pt] Beschouw het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{q} & = & p(1-q^2), \\ \dot{p} & = & -q(1-p^2). \end{array} \right. \tag{3}$$

(a) [5 pt] Bepaal alle rustpunten van (3) in het (q,p)-vlak.

De rustpunten voldoen aan het stelsel

$$\left\{ \begin{array}{rcl} p(1-q^2) & = & 0, \\ q(1-p^2) & = & 0. \end{array} \right.$$

Dus heeft het stelsel (3) vijf rustpunten:

$$E_0 = (0,0), \quad E_1 = (1,1), \quad E_2 = (1,-1), \quad E_3 = (-1,-1), \quad E_4 = (-1,1).$$

(b) [10 pt] Bewijs dat (3) herschreven kan worden als een Hamilton-stelsel

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{q} & = & \dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p}, \\ \dot{p} & = & -\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial q}, \end{array} \right.$$

en vind de Hamiltonfunctie $H = H(q,p)$.

De Hamiltonfunctie met $H(0,0) = 0$ is evident

$$H(q,p) = \frac{1}{2}(q^2 + p^2 - q^2p^2). \tag{4}$$

Omdat H de constante van beweging is, bestaan de niveau krommen van H uit de banen van (3).

(c) [5 pt] Laat zien dat de vier lijnen $l_{1,2} := \{(q,p) \in \mathbb{R}^2 : q = \pm 1\}$ en $l_{3,4} := \{(q,p) \in \mathbb{R}^2 : p = \pm 1\}$ *invariant* zijn voor (3), d.w.z. bestaan uit de banen van (3).

Methode I: Langs $l_{1,2}$ is de functie (4) constant:

$$H(\pm 1, p) = \frac{1}{2}(1 + p^2 - p^2) = \frac{1}{2}.$$

Langs $l_{3,4}$ is de functie (4) ook constant:

$$H(q, \pm 1) = \frac{1}{2}(q^2 + 1 - q^2) = \frac{1}{2}.$$

Merk op dat de rustpunten E_k met $k = 1,2,3,4$ in dezelfde niveau-verzameling

$$H(q,p) = \frac{1}{2}$$

zitten.

Methode II: Zij $G_{\pm}(q,p) := q \mp 1$. Dan is $(q,p) \in l_{1,2}$ equivalent met $G_{\pm}(q,p) = 0$. Langs iedere oplossing van (3) geldt

$$\frac{d}{dt}G_{\pm}(q(t),p(t)) = \dot{q}(t) = p(t)(1 - q^2(t)) = -p(t)(q(t)-1)(q(t)+1) = -p(t)G_+(q(t),p(t))G_-(q(t),p(t)).$$

De functies $g_\pm(t) = G_\pm(q(t), p(t))$ voldoen aan de differentiaalvergelijking

$$\dot g_\pm(t) = -p(t)g_+(t)g_-(t).$$

Als $g_\pm(0) = 0$, d.w.z. $(q(0), p(0)) \in l_{1,2}$, dan is $g_\pm(t) = 0$, ofwel $(q(t), p(t)) \in l_{1,2}$, voor alle t waarvoor de oplossing van (3) bestaat. De lijnen $l_{1,2}$ zijn dus invariant.

Zij $F_\pm(q, p) := p \mp 1$. Dan is $(q, p) \in l_{3,4}$ equivalent met $F_\pm(q, p) = 0$. Langs iedere oplossing van (3) geldt

$$\frac{d}{dt}F_\pm(q(t), p(t)) = \dot p(t) = -q(t)(1 - p^2(t)) = q(t)(p(t) - 1)(p(t) + 1) = q(t)F_+(q(t), p(t))F_-(q(t), p(t)).$$

De functies $f_\pm(t) = F_\pm(q(t), p(t))$ voldoen aan de differentiaalvergelijkingen

$$\dot f_\pm(t) = q(t)f_+(t)f_-(t).$$

Als $f_\pm(0) = 0$, d.w.z. $(q(0), p(0)) \in l_{3,4}$, dan is $f_\pm(t) = 0$, ofwel $(q(t), p(t)) \in l_{3,4}$, voor alle t waarvoor de oplossing bestaat. De lijnen $l_{3,4}$ zijn invariant.

Methode III: Het vectorveld van (3)

$$f(q, p) = \begin{pmatrix} p(1 - q^2) \\ -q(1 - p^2) \end{pmatrix}$$

is niet gelijk aan nul en raakt de lijnen l_k in alle punten behalve $E_1 = l_1 \cap l_3$, $E_2 = l_1 \cap l_4$, $E_3 = l_2 \cap l_4$ en $E_4 = l_2 \cap l_3$ (de rustpunten). Inderdaad, de vector

$$n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

is orthogonaal met $l_{1,2}$ en

$$\langle n, f(q, p)\rangle\big|_{l_{1,2}} = p(1 - q^2)\big|_{q=\pm 1} \equiv 0.$$

De vector

$$m = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

is orthogonaal met $l_{3,4}$. Verder geldt

$$\langle m, f(q, p)\rangle\big|_{l_{3,4}} = -q(1 - p^2)\big|_{p=\pm 1} \equiv 0.$$

(d) [10 pt] Bepaal de types van alle rustpunten van (3), in het bijzonder hun stabiliteit.

Methode I: De matrix van linearisatie van (3) in het rustpunt E_0 is

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De eigenwaarden van A_0 zijn $\lambda_{1,2} = \pm i$. Dus heeft de linearisatie een centrumpunt in E_0. Omdat (3) een Hamilton-stelsel is, is dit rustpunt ook een centrumpunt voor (3), d.w.z. alle banen van (3) in een omgeving van E_0 zijn gesloten. E_0 is dus Lyapunov-stabiel.

De linearisatie matrices van (3) in de rustpunten E_1, E_2, E_3, E_4 zijn

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

respectievelijk. De eigenwaarden van iedere A_k zijn $\lambda_{1,2} = \pm 2$. De linearisaties dus hebben de hyperbolische zaddelpunten in $E_{1,2,3,4}$. Wegens de Stelling van Grobman-Hartman, ieder punt is ook een zadelpunt voor (3). Deze rustpunten zijn instabiel.

Methode II: De Hamiltonfunctie (4) heeft een lokaal minimum in E_0. Inderdaad, in een omgeving van $E_0 = (0, 0)$ geldt

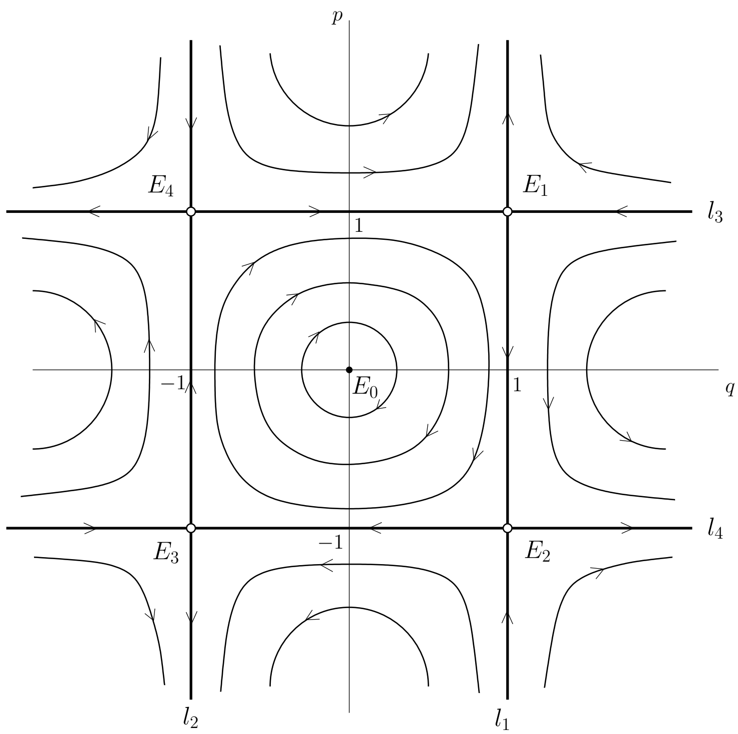
$$H(q, p) = \frac{1}{2}(q^2 + p^2) + O(\|(q, p)\|^4).$$

Het kwadratische deel heeft een lokaal minimum in E_0 en de functie H dus ook. Alle niveau-krommen van H in een omgeving van E_0 zijn gesloten: het is een Lyapunov-stabiel centrumpunt.

Bij ieder van de rustpunten E_1, E_2, E_3 en E_4, zijn er twee niveau-lijnen l_k van H die door het rustpunt gaan. Ieder punt is dus een instabiel zadelpunt.

(e) [10 pt] Schets het faseplaatje behorend bij (3) in het (q, p)-vlak. Let op de rustpunten en andere speciale banen. Zet ook pijltjes!

Zie Figuur 1.



Figuur 1: Faseplaatje van (3) in het (q, p)-vlak.

Bonus Opgave [20 pt] Bereken de matrix $\sin(A)$ voor

$$A = \begin{pmatrix} \pi/2 & 1 & 1 \\ 0 & \pi/2 & 1 \\ 0 & 0 & \pi/2 \end{pmatrix}.$$

We kunnen schrijven $A = (\pi/2)E + N$ waarin

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Er geldt

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad N^3 = 0.$$

Dus $N^k = 0$ voor $k \geq 3$. Verder kunnen we op twee manieren werken.

Methode I: Met de formule van Euler
$$\sin(x) = \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i},$$
schrijven we
$$\sin(A) = \frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{iA} - \mathrm{e}^{-iA}).$$
Verder geldt
$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{iA} &= \mathrm{e}^{i(\pi/2)E+iN} = \mathrm{e}^{i\pi/2}\mathrm{e}^{iN} = i\left(E + iN - \frac{1}{2}N^2\right), \\ \mathrm{e}^{-iA} &= \mathrm{e}^{-i(\pi/2)E-iN} = \mathrm{e}^{-i\pi/2}\mathrm{e}^{-iN} = -i\left(E - iN - \frac{1}{2}N^2\right), \end{aligned}$$
omdat $N^k = 0$ voor $k \geq 3$. Hieruit volgt
$$\sin(A) = \frac{1}{2i}\left(iE - N - \frac{i}{2}N^2 + iE + N - \frac{i}{2}N^2\right) = E - \frac{1}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Methode II: Met de Taylor ontwikkeling
$$\sin(\pi/2 + x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6),$$
krijgen we
$$\sin(A) = \sin((\pi/2)E + N) = E - \frac{1}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
omdat $N^k = 0$ voor $k \geq 3$.