

Tentamen Differentiaalvergelijkingen (WISB231), 11 april 2019, 13:30-16:30

Dit tentamen bestaat uit drie reguliere opgaven en één bonus opgave. Maak iedere opgave op een apart vel. Het is bij dit tentamen niet toegestaan om een boek, aantekeningen, mobiele telefoon, laptop of een grafische rekenmachine te gebruiken. Vergeet niet op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer te schrijven. Motiveer uw antwoorden. Succes!

Opgave 1 [20 pt] Zij $I = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ en zij functies $u_{1,2} : I \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$u_1(x) := x \quad \text{en} \quad u_2(x) := \frac{1}{x}.$$

- (a) [10 pt] Vind twee functies $a_{1,2} : I \rightarrow \mathbb{R}$ zo dat $\{u_1, u_2\}$ een basis is van de oplossingsruimte van de lineaire differentiaalvergelijking

$$u'' + a_1(x)u' + a_2(x)u = 0, \quad x \in I. \quad (1)$$

- (b) [10 pt] Bereken een oplossing van het inhomogene randwaardeprobleem

$$\begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = \frac{1}{x^2}, & x \in [1, 2], \\ y(1) = 0, \\ y(2) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Opgave 2 [40 pt] Bereken e^{xA} voor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Opgave 3 [40 pt] Beschouw het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \dot{q} = p(1 - q^2), \\ \dot{p} = -q(1 - p^2). \end{cases} \quad (3)$$

- (a) [5 pt] Bepaal alle rustpunten van (3) in het (q, p) -vlak.
(b) [10 pt] Bewijs dat (3) herschreven kan worden als een Hamilton-stelsel

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p}, \\ \dot{p} = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q}, \end{cases}$$

en vind de Hamiltonfunctie $H = H(q, p)$.

Z.O.Z.

- (c) [5 pt] Laat zien dat de vier lijnen $l_{1,2} := \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : q = \pm 1\}$ en $l_{3,4} := \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : p = \pm 1\}$ *invariant* zijn voor (3), d.w.z. bestaan uit de banen van (3).
- (d) [10 pt] Bepaal de types van alle rustpunten van (3), in het bijzonder hun stabiliteit.
- (e) [10 pt] Schets het faseplaatje behorend bij (3) in het (q, p) -vlak. Let op de rustpunten en andere speciale banen. Zet ook pijltjes!

Bonus Opgave [20 pt] Bereken de matrix $\sin(A)$ voor

$$A = \begin{pmatrix} \pi/2 & 1 & 1 \\ 0 & \pi/2 & 1 \\ 0 & 0 & \pi/2 \end{pmatrix}.$$