

## Hertentamen Differentiaalvergelijkingen (WISB231), 5 juli 2018, 13:30-16:30

Dit hertentamen bestaat uit vier opgaven. Maak iedere opgave op een apart vel. Het is bij dit tentamen niet toegestaan om een boek, aantekeningen, mobiele telefoon, laptop of een grafische rekenmachine te gebruiken. Vergeet niet op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer te schrijven. Motiveer uw antwoorden. Succes!

**Opgave 1** [20 pt] Beschouw op  $[0, \pi]$  het randwaardeprobleem

$$y''(x) + y(x) = 2x - \pi, \quad y(0) = y(\pi) = 0. \quad (1)$$

Hoeveel oplossingen heeft (1)?

**Opgave 2** [30 pt] Bereken  $e^{xA}$  voor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Opgave 3** [30 pt] Beschouw het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \dot{q} = p(1 - q^2), \\ \dot{p} = -q(1 - p^2). \end{cases} \quad (2)$$

(a) [5 pt] Bepaal alle rustpunten van (2) in het  $(q, p)$ -vlak.

(b) [5 pt] Bewijs dat (2) herschreven kan worden als een Hamilton-stelsel

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p}, \\ \dot{p} = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q}, \end{cases}$$

en vind de Hamiltonfunctie  $H = H(q, p)$ .

(c) [5 pt] Laat zien dat de vier lijnen  $l_{1,2} := \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : q = \pm 1\}$  en  $l_{3,4} := \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : p = \pm 1\}$  invariant zijn voor (2), d.w.z. bestaan uit de banen van (2).

(d) [5 pt] Bepaal de types van alle rustpunten van (2), in het bijzonder hun stabiliteit.

(e) [10 pt] Schets het faseplaatje behorend bij (2) in het  $(q, p)$ -vlak. Let op de rustpunten en andere speciale banen. Zet ook pijltjes!

**Opgave 4** [20 pt] Zij  $y(x)$  een oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y' = -xy + x^3, \quad y(0) = -2. \quad (3)$$

Vind alle coëfficiënten  $a_n$  in de reeksontwikkeling  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ .