

Hertentamen Differentiaalvergelijkingen (WISB231), 4 juli 2019, 13:30-16:30

Dit hertentamen bestaat uit vier opgaven. Maak iedere opgave op een apart vel. Het is bij dit tentamen niet toegestaan om een boek, aantekeningen, mobiele telefoon, laptop of een grafische rekenmachine te gebruiken. Vergeet niet op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer te schrijven. Motiveer uw antwoorden. Succes!

Opgave 1 [30 pt] Onderzoek of er een constante 2×2 matrix A bestaat zo dat

$$\begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix} = e^{tA}. \quad (1)$$

Opgave 2 [30 pt] Beschouw het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = (1-x^2-y^2)y-x. \end{cases} \quad (2)$$

- (a) [5 pt] Bepaal alle rustpunten van (2) en hun stabiliteit.
- (b) [10 pt] Maak de transformatie naar poolcoördinaten $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Laat zien dat het stelsel (2) onder deze transformatie overgaat in het volgende stelsel:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r^2)\sin^2 \varphi, \\ \dot{\varphi} = -1 + (1-r^2)\sin \varphi \cos \varphi. \end{cases}$$

- (c) [5 pt] Laat zien dat (2) één periodieke baan heeft en vind de bijbehorende periodieke oplossing. Bepaal tevens de periode van deze oplossing.
- (d) [10 pt] Schets het faseplaatje behorend bij (2) in het (x, y) -vlak. Zet ook pijltjes!

Opgave 3 [20 pt] Beschouw op $[0, \pi]$ het randwaardeprobleem

$$y''(x) + y(x) = 2x - \pi, \quad y(0) = y(\pi) = 0. \quad (3)$$

Hoeveel oplossingen heeft (3)?

Opgave 4 [20 pt] Bereken de matrix $\cos(A)$ voor

$$A = \begin{pmatrix} \pi/2 & 1 & 1 \\ 0 & \pi/2 & 1 \\ 0 & 0 & \pi/2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$