Ringen en Galoistheorie, 10 april 2019

Gebruik van het dictaat en/of andere aantekeningen is niet toegestaan.
Schrijf op elk vel je naam en studentnummer.
Laat bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt!!
Ook als je een onderdeel niet kunt maken, kun je het gevraagde resultaat wel gebruiken voor de daaropvolgende onderdelen.
Elk onderdeel is 5 punten waard (in totaal 100).
Veel succes!

1. Beschouw het polynoom $P(X) = X^4 - 2X^3 + 2X^2 + 1$.
   (a) Bewijs dat $P(X)$ irreducibel is in $\mathbb{Q}[X]$ (hint: vervang X door $X+1$).
   (b) Ontbind $P(X)$ in irreducibele factoren in $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$.
2. Laat $f\colon R \to S$ een ringhomomorfisme zijn. Laat I een ideaal van S zijn en laat M een maximaal ideaal van S zijn.
   (a) Bewijs dat $f^{-1}(I)$ een ideaal van R is.
   (b) Bewijs dat $f^{-1}(M)$ een priemideaal van R is.
   (c) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat $f^{-1}(M)$ geen maximaal ideaal van R hoeft te zijn.
   (d) Bewijs: als f surjectief is, dan is $f^{-1}(M)$ wel een maximaal ideaal van R.
3. Welke van de volgende beweringen zijn waar? In elk van de gevallen: geef een bewijs of laat zien dat de bewering onwaar is.
   (a) Als x een nilpotent element is van een ring R, dan is $1 - x$ een eenheid van R.
   (b) $\mathbb{F}_2[X]/(X^2 + 1) \cong \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$.
   (c) Laat L een Galoisuitbreiding zijn van $\mathbb{Q}$ van graad n. Dan is het aantal tussenlichamen van L over $\mathbb{Q}$ gelijk aan het aantal positieve delers van n.
4. Bepaal voor elk van de volgende idealen of het een priemideaal is en of het een maximaal ideaal is.
   (a) $(3, X^3 + 4X^2 + 4X + 10)$ in $\mathbb{Z}[X]$.
   (b) $(X^2 + 2Y^2)$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})[X, Y]$.
   (c) $(X^2 + 1, Y^2 + 2, Z^2 - 2)$ in $\mathbb{Q}[X, Y, Z]$.

Z.O.Z. voor opgave 5

5. Beschouw het polynoom $f = X^4 + 6X^2 - 3 \in \mathbb{Q}[X]$ en laat L het splijtlichaam van f over $\mathbb{Q}$ zijn.

   (a) Bewijs dat f irreducibel is in $\mathbb{Q}[X]$.

   (b) Bewijs dat f minstens één reëel nulpunt heeft.

   (c) Zij α een reëel nulpunt van f. Toon aan dat $\sqrt{-3}/\alpha$ en $-\alpha$ ook nulpunten van f zijn. Bepaal alle nulpunten van f in termen van α en $\sqrt{-3}$.

   (d) Toon aan dat $\sqrt{-3} \in L$ en dat $L = \mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{-3})$.

   (e) Bepaal de graad $[L : \mathbb{Q}]$.

   (f) Toon aan dat er een $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ bestaat zó dat

   $$\sigma(\alpha) = \sqrt{-3}/\alpha, \quad \sigma(\sqrt{-3}) = -\sqrt{-3}.$$

   Laat zien dat σ orde 4 heeft.

   (g) Bepaal het deellichaam van L dat via de Galoiscorrespondentie met de ondergroep voortgebracht door σ^2 correspondeert.

   (h) Zij M het deellichaam van L dat via de Galoiscorrespondentie met de ondergroep voortgebracht door σ correspondeert. Bewijs dat M een primitieve vierde eenheidswortel bevat.