Tentamen groepentheorie 5-11-2018. Je mag resultaten uit het boek en de hoorcolleges vrij gebruiken, zolang je ernaar verwijst en tenzij je gevraagd wordt ze opnieuw te bewijzen. Opgaven uit de werkcolleges moet je wel opnieuw te bewijzen. Je mag voorgaande onderdelen van een opgave gebruiken zonder ze bewezen te hebben.

Begin elk van de vier opgaven op een nieuw vel!

Opgave 1.

(a) **1 punt** Bewijs dat $(123) \in A_5$ en dat het aantal 3-cykels in S_7 gelijk is aan 70.

(b) **1 punt** Bepaal de conjugatieklassen van $e, r, r^2, r^3 \in D_4$. Concludeer dat het centrum van D_4 ongelijk is aan $\{e\}$. Bewijs je antwoord.

(c) **1 punt** Stel G is een groep en $g \in G$. Bewijs dat g een *unieke* inverse heeft. Gebruik alleen de definitie van een groep en laat zorgvuldig zien hoe je die toepast.

Opgave 2.

(a) **1 punt** Geef de definities van: een groepsactie, een baan, een stabilisator.

(b) **1.5 punt** Decoreer elk hoekpunt van een kubus met één uit 3 kleuren. Bewijs dat er—op draaiingen na—precies 333 gedecoreerde kubussen gemaakt kunnen worden. *Hint: Je mag gebruiken dat:* $\frac{1}{24}(3^8 + 17 \cdot 3^4 + 6 \cdot 3^2) = 333$.

(c) **0.5 punt** Decoreer elk zijvlak van een octaëder met één uit 3 kleuren. Hoeveel gedecoreerde octaëders—op draaiingen na—kunnen gemaakt worden? Bewijs je antwoord.

Opgave 3.

(a) **1 punt** Zij G een groep van orde $p^m k$ waarbij p priem is, waarbij $m, k > 0$ en $\text{ggd}(p^m, k) = 1$. Stel dat $H \leq G$ orde p^m heeft. Bewijs: H is de enige ondergroep van orde p^m dan en slechts dan als $H \lhd G$.

(b) **1 punt** Zij $\phi : G \to G'$ een groepshomomorfisme tussen eindige groepen. Gegeven is dat $\text{ggd}(|G|, |G'|) = 1$. Bewijs dat de kern van ϕ gelijk is aan G. *Hint: Gebruik de eerste isomorfiestelling.*

(c) **1 punt** Zij G een groep van orde ab met $a, b > 0$ en $\text{ggd}(a, b) = 1$. Stel dat $H \leq G$ orde a heeft. Bewijs: H is de enige ondergroep van orde a dan en slechts dan als $H \lhd G$. *Hint: Gebruik (b).*

Opgave 4. 1 punt Bewijs dat een groep G van orde 105 een ondergroep van orde 35 bevat. Deze ondergroep is cyclisch (Armstrong, 20.6); dit hoef je niet te bewijzen. Volg hierbij de volgende stappen:

- Stap 1: Bewijs dat G een unieke 5-Sylow *of* een unieke 7-Sylow ondergroep bevat.
- Stap 2: Bewijs in beide gevallen dat G een ondergroep van orde 35 bevat.

Woordenboek. Centrum=centre. Baan=orbit. Ondergroep=subgroup. Kern=kernel.