Hertentamen groepentheorie 3-1-2019. Je mag resultaten uit het boek en de hoorcolleges vrij gebruiken, zolang je ernaar verwijst en tenzij je gevraagd wordt ze opnieuw te bewijzen. Opgaven uit de werkcolleges moet je wel opnieuw te bewijzen. Je mag voorgaande onderdelen van een opgave gebruiken zonder ze bewezen te hebben.

Opgave 1.

(a) **1 punt** Schrijf $\sigma = (234)$ als product van transposities van de vorm $(1a)$.

(b) **1 punt** Bewijs dat er geen enkelvoudige groep van orde 215 bestaat.

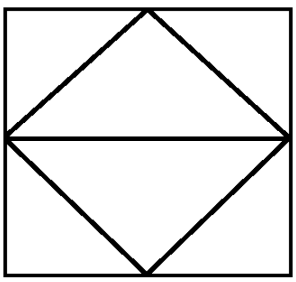
(c) **1 punt** Zij G een eindige groep van even orde. Bewijs dat het aantal elementen in G van orde 2 oneven is.

Opgave 2.

(a) **1 punt** Vind een ondergroep van S_4 die isomorf is met $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. *Hint: Cayley.*

(b) **1 punt** Beschouw onderstaande vierkante tegel die opgedeeld is in zes driehoeken, waarvan de hoekpunten liggen op het midden van een zijde van de tegel of op een hoekpunt van de tegel. Stel we hebben n kleuren tot onze beschikking en we decoreren de tegel door elk van de zes driehoeken een kleur te geven. We beschouwen twee gedecoreerde tegels als equivalent wanneer ze door *draaiing of spiegeling* op elkaar kunnen worden afgebeeld. Laat zien dat, op symmetrieën na, er $\frac{1}{4}(n^6 + n^4 + 2n^3)$ gedecoreerde tegels zijn. Gebruik de telstelling.

(c) **1 punt** Zij G een groep en $[G, G]$ de ondergroep voortgebracht door alle commutatoren; i.e. uitdrukkingen van de vorm $xyx^{-1}y^{-1}$ met $x, y \in G$. Bewijs dat $[G, G] \lhd G$ en dat $G/[G, G]$ abels is.



Z.O.Z!

Opgave 3.

(a) **1 punt** Beschouw $\mathbb{R}$ als groep met optelling en $\mathbb{R}_{>0}$ (positieve reële getallen) als groep met vermenigvuldiging. Zijn deze groepen isomorf? Bewijs je antwoord.

(b) **1 punt** Zij G een eindige groep en $H \leq G$ een ondergroep van index n. Construeer een groepshomomorfisme $\phi : G \to S_n$ zodanig dat $\ker \phi \leq H$. *Hint: Zij X de collectie linker nevenklassen, d.w.z. $X = \{g_1 H, \ldots, g_n H\}$ met alle $g_i H$ onderling verschillend. Laat zien dat iedere $g \in G$ aanleiding geeft tot een permutatie $L_g : X \to X$ gegeven door $L_g(g_i H) = (gg_i)H$ voor alle $i = 1, \ldots, n$.*

(c) **1 punt** Zij G een eindige enkelvoudige groep en $H \leq G$ een ondergroep van index $n > 1$. Bewijs dat $\frac{n!}{|G|} \in \mathbb{Z}$.

Opgave 4. 1 punt Bewijs dat er geen enkelvoudige groep G van orde 216 bestaat. Volg hierbij de volgende stappen:

- Stap 1: Stel G is enkelvoudig. Bewijs dat het aantal 3-Sylow ondergroepen van G gelijk is aan 4.
- Stap 2: Stel $X = \{H_1, H_2, H_3, H_4\}$ is de collectie 3-Sylow ondergroepen. Definieer een conjugatie-actie van G op X en bewijs dat deze afbeelding aanleiding geeft tot een groepshomomorfisme $G \to S_4$.
- Stap 3: Gebruik Stap 2 om een tegenspraak af te leiden.

Woordenboek. Enkelvoudig=simple, ondergroep=subgroup, voortgebracht=generated, linker nevenklasse=left coset.

Opgave 1. (a) Gebuik de identiteiten: $(abc) = (ac)(ab)$ en $(ab) = (1a)(1b)(1a)$. Dan $(234) = (24)(23) = (12)(14)(12)(12)(13)(12)$. (b) Stel G is een enkelvoudige groep van orde 215. Priemfactorisatie: $215 = 5 \cdot 43$. Het aantal 5-Sylows in G deelt 43 en $\equiv 1 \mod 5$ (Sylow III). Aangezien $53 \not\equiv 1 \mod 5$ is er een unieke 5-Sylow H. Derhalve $gHg^{-1} = H$ voor alle $g \in G$, want elke gHg^{-1} is een ondergroep van G van orde 5. Dus H is normaal; tegenspraak. (c) Stel $g \in G$ en $g \neq e$. Dan: $g^2 = e$ (i.e. g heeft orde 2) d.e.s.d.a. $g = g^{-1}$. De elementen van $G \setminus \{e\}$ van orde > 2 komen dus in paren. Derhalve $0 \equiv |G| \equiv 1 + |\{\text{elementen van orde 2}\}| \mod 2$.

Opgave 2. (a) Label $1 = (0,0)$, $2 = (1,0)$, $3 = (0,1)$, $4 = (1,1)$. Cayley geeft dat de gewenste ondergroep gegeven wordt door $\{L_{(0,0)}, L_{(1,0)}, L_{(0,1)}, L_{(1,1)}\} \leq S_4$, waar $L_g : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ linkstranslatie aanduidt. Derhalve $L_{(0,0)} = e$, $L_{(1,0)} = (12)(34)$, $L_{(0,1)} = (13)(24)$, $L_{(1,1)} = (14)(23)$. (b) Zij s spiegeling in de horizontale lijn. De symmetriegroep van de ongedecoreerde tegel uit de figuur is $G = \{e, r^2, s, r^2 s\} \leq D_4$. Zij X de collectie van alle n^6 gedecoreerde tegels (zonder symmetrie). De groep G werkt op X door toepassing van de symmetrie. Bepaal fixloci: $|X^e| = n^6$, $|X^{r^2}| = n^3$, $|X^s| = n^3$ en $|X^{r^2 s}| = n^4$. Illustreer dit aan de hand van een duidelijke beschrijving of plaatjes! De telstelling geeft het antwoord. (c) Voor een commutator $xyx^{-1}y^{-1}$ en $g \in G$ geldt dat $gxyx^{-1}y^{-1}g^{-1} = (gxg^{-1})(gyg^{-1})(gx^{-1}g^{-1})(gy^{-1}g^{-1}) = (gxg^{-1})(gyg^{-1})(gxg^{-1})^{-1}(gyg^{-1})^{-1}$ is een commutator. Een inverse van een commutator is een commutator dus een willekeurig element van $[G,G]$ is van de vorm $c_1 \cdots c_n$ met c_i commutatoren. Derhalve $gc_1 \cdots c_n g^{-1} = (gc_1 g^{-1}) \cdots (gc_n g^{-1})$ is een product van commutatoren. Voor alle $x[G,G], y[G,G] \in G/[G,G]$ hebben we dat $xy[G,G] = yx[G,G]$ want $(yx)^{-1}(xy) = x^{-1}y^{-1}xy \in [G,G]$.

Opgave 3. (a) De afbeelding $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, $f(x) = e^x$ is een bijectie met inverse $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \ln x$ (geen bewijs nodig). Voorts $f(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = f(x)f(y)$ dus beide groepen zijn isomorf. (b) Ten eerste is iedere $L_g : X \to X$ een permutatie. Stel $L_g(g_i H) = (gg_i)H = L_g(g_j H) = (gg_j H)$ dan $g_i H = g_j H$ (vermenigvuldig met g^{-1}). Voorts $g_i H = g(g^{-1}g_i)H = L_g((g^{-1}g_i)H)$. Ten tweede is de afbeelding $\phi : g \mapsto L_g$ een groepshomorfisme: $\phi(gh)(g_i H) = L_{gh}(g_i H) = (ghg_i)H$ alsook $\phi(g)(\phi(h)(g_i H)) = \phi(g)((hg_i)H) = (ghg_i)H$. Ten derde $\ker \phi$ is automatisch een (normale) ondergroep van G en als $g \in \ker \phi$, dan $L_g(H) = gH = H$ ofwel $g \in H$. (c) Beschouw de afbeelding $\phi : G \to S_n$ van (b). Vanwege de eerste isomorfiestelling, $\ker \phi \lhd G$. Als $\ker \phi = H = G$, dan $n = 1$ (tegenspraak). Dus $\ker \phi = \{e\}$ (G is enkelvoudig) en G is isomorf met een ondergroep van S_n. Derhalve $|G|$ deelt $n!$ (Lagrange).

Opgave 4. Stel G is een enkelvoudige groep van orde $216 = 2^3 3^3$. Het aantal 3-Sylows is een deler van 8 (d.w.z. $1, 2, 4, 8$) en $\equiv 1 \mod 3$, dus 1 of 4. De eerste mogelijkheid is uitgesloten want G is enkelvoudig en een unieke 3-Sylow zou een normale ondergroep zijn. Stel $X = \{H_1, H_2, H_3, H_4\}$ is de collectie 3-Sylows. Definieer een actie van G op X gegeven door $H_i \mapsto gH_i g^{-1}$ ($gH_i g^{-1}$ is duidelijk een 3-Sylow en dit is een actie want $eH_i e^{-1} = H_i$ en $g(hH_i h^{-1})g^{-1} = (gh)H_i(gh)^{-1}$). Deze actie geeft een groepshomorfisme $\phi : G \to S_4$ (door te labelen $i = H_i$). Aangezien $\ker \phi \lhd G$ (eerste isomorfiestelling) en $\ker \phi \neq G$ (anders is elke H_i normaal; uitgesloten want G enkelvoudig), concluderen we $\ker \phi = \{e\}$ (G enkelvoudig). Conclusie: $216 \leq 4! = 24$ tegenspraak.