Hertentamen Inleiding Kansrekening en Statistiek (WISB161) 2018-2019
16 april 2019

I *Schrijf uw naam en studentnummer op elk vel dat u inlevert.*

II *Het tentamen wordt door 2 docenten nagekeken. Zorg ervoor dat uw opgaven 1, 2, 3 en 4 apart inlevert van opgaven 5, 6 en 7.*

III *Elektronische apparatuur is niet toegestaan. Het boek van Dekking et al. en 1 A4'tje met aantekeningen mag wel gebruikt worden.*

IV *U mag in ieder onderdeel de conclusies van voorgaande onderdelen gebruiken, ook als u die (nog) niet bewezen hebt. Als u een antwoord op een vorige deelvraag niet heeft kunnen vinden, mag u een antwoord naar keuze veronderstellen en daarmee verder rekenen. Geef duidelijk aan als u dit doet. Als de vraag door de aanname eenvoudiger wordt kan dit tot puntenaftrek leiden.*

V *Motiveer steeds uw antwoord door duidelijk aan te geven welke argumenten en welke resultaten u gebruikt om een bepaalde conclusie te trekken.*

VI *U heeft 3 uur de tijd voor het tentamen.*

VII *Achter elke deelvraag staat het aantal punten dat met de deelvraag te behalen is. In totaal zijn er 90 punten te behalen en 10 extra punten met de bonusvraag 6d. De puntenverdeling per vraag is: 1 - 15, 2 - 15, 3 - 14, 4 - 14, 5 - 14, 6 - 9 (+10), 7 - 9.*

Veel succes!

Opgave 1

Zij $\theta > 0$ een parameter en zij X een continue stochastische variabele op de reële getallen met kansdichtheidsfunctie

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 2\frac{\theta^2}{x^3} & \text{voor } x \geq \theta \\ 0 & \text{voor } x < \theta. \end{cases}$$

Stel dat we een steekproef $X_1, X_2, \ldots, X_n$ van grootte n hebben waarbij alle X_i onafhankelijk en identiek verdeeld zijn als X en zij $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de realisatie van de steekproef.

a 5pt) Laat zien dat f_θ inderdaad een kansdichtheidsfunctie is.

b 10pt) Bepaal de meest-waarschijnlijke schatter (maximum likelihood estimate) van θ.

Opgave 2

Beschouw een erfelijke aandoening. Het is bekend dat 1% van de vaders en 1% van de moeders drager is van de aandoening. Partnerkeuze hangt niet af van dragerschap. Als beide ouders drager zijn van de aandoening, is de kans 1/4 dat hun kind de aandoening heeft, onafhankelijk van of hun andere kinderen de aandoening hebben. Als slechts een van de ouders of geen van de ouders drager is van de aandoening hebben hun kinderen de aandoening niet. Een test kan de aandoening in kinderen aantonen. De sensitiviteit van de test (de kans op een positief testresultaat als het geteste kind de aandoening heeft) is 1, de specificiteit (de kans op een negatief testresultaat als het geteste kind de aandoening niet heeft) is 0.99. U mag er in deze opgave vanuit gaan dat er geen ouders zijn die de aandoening zelf hebben.

a 6pt) Wat is de kans dat een kind zonder broers en zussen de aandoening heeft als het testresultaat positief was?

b 9pt) Wat is de kans dat een kind de aandoening heeft als zowel hij als zijn broer een positief testresultaat hadden en er verder niets bekend is over dragerschap van de aandoening in de familie? Om een numerieke uitkomst te krijgen mag u in het rekenwerk redelijke benaderingen gebruiken (zo lang u geen onnodige benaderingen doet in de trend van $1 \approx 0.99 \approx 0.99^2 \approx 0.99^3 \ldots \approx 0$).

Zie ommezijde.

Opgave 3
Een studente wil de lichtsnelheid bepalen. Daartoe meet zij de snelheid van het licht 10 keer. Zij veronderstelt dat de gemeten waarden onafhankelijk van elkaar zijn, dat er geen systematische fout optreedt en dat de metingen normaal verdeeld zijn. De variantie in de uitkomsten is niet van te voren bekend. Op basis van de 10 metingen construeert ze een symmetrisch 95% betrouwbaarheidsinterval voor de lichtsnelheid. Ze vindt als 95% betrouwbaarheidsinterval: (299792454 - 299792462) meter/seconde.

a 5pt) Wat is het gemiddelde van de 10 metingen geweest?

b 9pt) Is het op basis van deze data mogelijk een symmetrisch 90% betrouwbaarheidsinterval voor de lichtsnelheid te bepalen? Zo ja, bepaal dit 90% betrouwbaarheidsinterval, zo nee, welke data heeft u nodig om dit wel te kunnen.

Opgave 4
Veronderstel dat de kans om te winnen met roulette in een casino $\frac{1}{2}$ is en de kans om te verliezen ook $\frac{1}{2}$. Het casino krijgt een tip dat een bezoeker mogelijk vals speelt met roulette. Om dat te onderzoeken worden 4 opeenvolgende roulette-spellen waar de bezoeker aan deelneemt geobserveerd. Als deze observaties aanleiding geven om vals spel te vermoeden, wordt er een grootschaliger onderzoek gestart. Het casino neemt hiervoor een significantieniveau van $\alpha = 0.2$.

a 4pt) Formuleer de nulhypothese en de alternatieve hypothese.

De bezoeker wint het spel bij zijn 1^e, 2^e en 4^e spel, maar verliest tijdens het 3^e spel.

b 10pt) Zal het casino de bezoeker verder gaan onderzoeken?

Opgave 5 *Gebruik een nieuw vel papier!*
Zij Ω de uitkomstenruimte en P een kansfunctie op Ω. Veronderstel dat A, B en C deelverzamelingen van Ω zijn. Toon aan of de volgende stellingen waar zijn voor alle deelverzamelingen A, B en C die aan de condities voldoen: Merk op, een Venn-diagram is geen bewijs.

a 6pt) Als $P(A) = P(B)$, dan geldt $A = B$.

b 8pt) Als $A \subseteq B$ en $P(A) = P(B)$, dan geldt $P(A \cap C) = P(B \cap C)$.

Opgave 6
Zij $X_1, X_2, X_3 \ldots$ onafhankelijke, identiek verdeelde Bernoulli stochasten met parameter p. Voor $i \geq 4$, definieer de stochast $S_i := \sum_{j=i-3}^{i} X_j$ en de stochast B_i door

$$B_i = \begin{cases} 1 & \text{als } S_i = 2 \\ 0 & \text{als } S_i \neq 2. \end{cases}$$

a 3pt) Bepaal de kansfunctie van S_i voor alle $i \geq 4$.

b 3pt) Bepaal de verwachtingswaarde van B_i voor alle $i \geq 4$.

c 3pt) Bepaal de variantie van B_i voor alle $i \geq 4$.

d 10pt) **Bonusopgave**. Bepaal $\text{Cov}(B_i, B_j)$ als $i, j \geq 4$ in de situaties dat $|i - j| = 0$, dat $|i - j| = 1$ en dat $|i - j| \geq 4$.

Opgave 7
Zij X een uniform verdeelde stochast op $(0, 1)$. Definieer de stochast Z door $Z = X + X^2$.

a 9pt) Bepaal zowel de cumulatieve verdeling $F_Z(z)$ als de kansdichtheidsfunctie $f_Z(z)$ van de stochast Z.

Einde.