1^e deeltentamen Inleiding Kansrekening en Statistiek (WISB161) 2018-2019
13 december 2018

Opgave 1
Er wordt twee keer met een eerlijke 6-zijdige dobbelsteen gegooid.
Zij A de gebeurtenis "de som van de ogen is 7".
Zij B de gebeurtenis "minstens 1 dobbelsteen heeft precies 1 oog".

- 6pt) Zijn A en B onafhankelijk?

ANTWOORD: $P(A) = \frac{1}{6}$. Ongeacht de uitkomst van de eerste worp, is er een kans van $\frac{1}{6}$ dat de som van de ogen 7 wordt.
$P(B) = P(\{1,1\} \cup \{1,2\} \cup \{1,3\} \cup \{1,4\} \cup \{1,5\} \cup \{1,6\} \cup \{2,1\} \cup \{3,1\} \cup \{4,1\} \cup \{5,1\} \cup \{6,1\}) = P(\{1,1\}) + P(\{1,2\}) + P(\{1,3\}) + P(\{1,4\}) + P(\{1,5\}) + P(\{1,6\}) + P(\{2,1\}) + P(\{3,1\}) + P(\{4,1\}) + P(\{5,1\}) + P(\{6,1\}) = \frac{11}{36}$.
$P(A \cap B) = P(\{1,6\} \cup \{6,1\}) = P(\{1,6\} + P(\{6,1\}) = \frac{2}{36}$.
We zien dus dat $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$, dus A en B zijn afhankelijk.

Opgave 2
Een multiple choice vraag heeft 4 antwoorden waarvan er precies één correct is. Uit ervaring weet de docent dat een student een kans p heeft om het antwoord te weten. Met kans $(1-p)$ weet de student het antwoord niet en gokt hij een antwoord, zodanig dat de kans om het correcte antwoord te gokken 1/4 is.

- 9pt) Wat is de kans dat de student het antwoord wist als hij het juiste antwoord heeft ingevuld?

ANTWOORD: Met behulp van de regel van Bayes weten we dat:
$P(\text{weten}|\text{juist}) = \frac{P(\text{juist}|\text{weten})P(\text{weten})}{P(\text{juist})} = \frac{1 \cdot p}{p \cdot 1 + (1-p)\frac{1}{4}} = \frac{4p}{3p+1}$

Opgave 3 De bandnaam ABBA heeft 6 permutaties, nl. {AABB, ABAB, ABBA, BAAB, BABA, BBAA}.

- 8pt) Hoeveel permutaties heeft het woord "STATISTIEK"?

ANTWOORD: Het woord statistiek heeft 10 letters, T (3x), S(2x), I(2x), A(1x), E(1x), K(1x). Het aantal permutaties van 10 verschillende elementen is 10!. We kunnen 3 verschillende elementen op 3! manieren op volgorde leggen en 2 verschillende elementen op 2! manieren.
Het aantal permutaties van het woord statistiek is dus: $\frac{10!}{3!2!2!1!1!1!} = \frac{10!}{3!2!2!} = \frac{10!}{4!}$.

Opgave 4
Alice en Bob gooien met twee eerlijke 6-zijdige dobbelstenen. Als ze geen zes gooien, rollen ze beide dobbelstenen opnieuw, net zo lang tot ze minstens 1 zes gooien. Als beide dobbelstenen 6 ogen hebben krijgt Alice 8 Euro van Bob. Als slechts 1 van de dobbelstenen 6 ogen heeft krijgt Bob 1 Euro van Alice.

a 6pt) Bepaal de kans dat Alice 8 Euro krijgt van Bob.
ANTWOORD: $P(2 \text{ zessen}|\text{minstens 1 zes}) = \frac{P(2 \text{ zessen en minstens 1 zes})}{P(\text{minstens 1 zes})} = \frac{P(2 \text{ zessen})}{P(\text{minstens 1 zes})} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{1}{11}$.

b 6pt) Hoeveel geld wint/verliest Alice gemiddeld met dit spel?
ANTWOORD: Zij X de stochast die de winst/het verlies van Alice bij een spel representeert. Dan geldt: $E(X) = \frac{1}{11}(+8) + \frac{10}{11}(-1) = \frac{8}{11} - \frac{10}{11} = -\frac{2}{11}$.

c 7pt) Bepaal de Variantie in winst/verlies in dit spel voor Alice.
ANTWOORD: $\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \left(\frac{1}{11}64 + \frac{10}{11}(-1)^2\right) - (-\frac{2}{11})^2 = \frac{74}{11} - (\frac{2}{11})^2 = \frac{814}{(11)^2} - \frac{4}{(11)^2} = \frac{800}{121}$.

Opgave 5
Zij X en Y continue stochasten met gezamenlijke kansdichtheid en c een constante

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x + cy^3 & \text{als } 0 \le x, y \le 1 \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

a 6pt) Bepaal de constante c.
ANTWOORD: Omdat $f_{X,Y}$ een kansdichtheidsfunctie is, moet gelden dat: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy f_{X,Y}(x,y) = 1$, dus $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy(x + cy^3) = 1$. Hieruit volgt, $\int\limits_0^1 dx(xy + \frac{1}{4}cy^4)|_0^1 = \int\limits_0^1 dx(x + \frac{1}{4}c) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}cx|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}c = 1$, dus $c = 2$.

b 7pt) Bepaal de marginale kansverdelingen $f_X(x)$ and $f_Y(y)$.

ANTWOORD: $f_X(x) = \begin{cases} \int\limits_0^1 dy(x + 2y^3) = x + \frac{1}{2} & \text{als } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$

$f_Y(y) = \begin{cases} \int\limits_0^1 dx(x + 2y^3) = \frac{1}{2} + 2y^3 & \text{als } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$

c 8pt) Bepaal $\text{Cov}(X,Y)$.
ANTWOORD: $\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
$E(X) = \int\limits_0^1 dx(x + \frac{1}{2})x = \int\limits_0^1 dx(x^2 + \frac{1}{2}x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{x^2}{4}|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$.
$E(Y) = \int\limits_0^1 dx(\frac{1}{2} + 2y^3)y = \int\limits_0^1 dx(\frac{1}{2}y + 2y^4) = \frac{1}{4}y^4 + \frac{2y^5}{5}|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{13}{20}$.
$E(XY) = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy(x+2y^3)xy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy(x^2y+2xy^4) = \int\limits_0^1 dx \left(\frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{2}{5}xy^5|_0^1\right) = \int\limits_0^1 dx \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{5}x\right) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5}x^2|_0^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \frac{11}{30}$
Dus $\text{Cov}(X,Y) = \frac{11}{30} - \frac{13}{20}\frac{7}{12} = \frac{11}{30} - \frac{91}{240} = -\frac{3}{240} = -\frac{1}{80}$.

Opgave 6
Zij n een strikt-positief geheel getal en zij X_1, X_2, ..., X_n onafhankelijke, identiek verdeelde stochasten die $Exp(1)$ verdeeld zijn, i.e.,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{als } x \geq 0 \\ 0 & \text{als } x < 0. \end{cases}$$

a 6pt) Bereken de cumulatieve dichtheid van X_1.
ANTWOORD: $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy =$
$$\begin{cases} 0 & \text{als } x \leq 0 \\ \int_0^x e^{-y}dy = -e^{-y}|_0^x = 1 - e^{-x} & \text{als } x > 0 \end{cases}.$$

b 9pt) Bepaal de verdeling van $Y = min\{X_1, X_2 \dots, X_n\}$. U mag kiezen of u de cumulatieve dichtheidsfunctie of de kansdichtheidsfunctie bepaalt. .
ANTWOORD: $F_Y(y) = P(Y \leq y) = 1 - P(Y > y) =$
$1 - P(min\{X_1, X_2 \dots, X_n\} > y) = 1 - P(X_1 > y, X_2 > y, \dots X_n > y$. Omdat de stochasten X_1, X_2, ..., X_n onafhankelijk zijn, geldt: $F_Y(y) = 1 - P(X_1 > y)P(X_2 > y) \dots P(X_n > y) = 1 - P(X_1 > y)^n = 1 - (1 - F_{X_1}(y))^n = 1 - (1 - e^{-y}))^n = 1 - (e^{-y})^n = 1 - e^{-ny}$.

Opgave 7

• 12pt) Gebruik de ongelijkheid van Jensen om te laten zien dat:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(x)dx \geq \frac{\pi}{4}\sin^2(\frac{\pi}{8}).$$

Hint: Zij X een uniforme stochast op $(0, \frac{\pi}{4})$.
ANTWOORD: Definieer $g(x) = \sin(x)$ voor $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$. Dan geldt
$g'(x) = 2\sin(x)\cos(x) = 2\sin(x)$ en $g''(x) = 4\cos(2x) > 0$. De functie g is dus een convexe functie.
De stochast X is een uniforme stochast met dichtheid $\frac{4}{pi}$ als $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$. $E(X) = \frac{\pi}{8}$ (midden van het interval waarop een uniforme stochast is gedefinieerd).
Volgens de ongelijkheid van Jensen geldt voor een convexe functie g dat:
$E(g(X)) \geq g(E(X))$, dus geldt:
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \sin^2(x) f_X(x) \geq \sin^2(E(X))$, en dus
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \sin^2(x)\frac{4}{\pi} \geq \sin^2(\frac{\pi}{8})$, waaruit volgt dat
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \sin^2(x) \geq \frac{\pi}{4}\sin^2(\frac{\pi}{8})$.

Einde.