Tentamen Infi B

9 april 2018, 9.00-12.00

- Zet op elk blad dat je inlevert je naam en nummer.
- Schrijf het antwoord op iedere vraag op een apart blad. Opgaven 1 en 2 moeten op hetzelfde blad. Opgaven 3, 4 en 5 op aparte bladen.
- Laat bij elk antwoord zien hoe je er aan bent gekomen.
- Het gebruik van een rekenmachine of ander zelf meegebracht materiaal is niet toegestaan.
- Doe je best om LEESBAAR te schrijven. Onleesbare antwoorden kunnen fout gerekend worden.

Opgave 1 (15 pt)
Beschouw de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{1+2^n} x^n .$$

(a) (7 pt) Bepaal alle waarden van $x \in \mathbb{R}$ waarvoor de reeks convergeert.

(b) (8 pt) Bereken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n}$$

Opgave 2 (15 pt)
Zij $f(x,y) = (x-1)^2 + 4(y-1)^2$ en R de rechthoek met hoekpunten $(0,0)$, $(4,0)$, $(4,2)$ en $(0,2)$. Bepaal de maximale waarde van $f(x,y)$ op R en het punt of de punten waarop dit maximum wordt aangenomen.

Opgave 3 (20 pt)
Zij $HK \subset \mathbb{R}^3$ de de halve kegel:
$HK = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\,,\, y \geq 0\}$.

(a) (5 pt) Bereken de inhoud van HK.

(b) (15 pt) Bepaal de coördinaten van het zwaartepunt van HK, aangenomen dat de massaverdeling uniform is.

Opgave 4 (25 pt)
Zij $SC = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. De normaal op SC wijst naar buiten. Gegeven is het vectorveld:

$$\mathbf{F} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z(x^2 + y^2)\hat{\mathbf{k}}\,.$$

Bereken de flux van $\mathbf{F}$ door SC:

(a) (15 pt) Rechtstreeks.

(b) (10 pt) Met behulp van de divergentiestelling.

NB: je mag gebruik maken van de formule: $\int_0^\pi \cos^n(\phi)\sin^3(\phi)\,\mathrm{d}\phi = \dfrac{4}{(n+1)(n+3)}$, als $n \geq 0$ even is.

Opgave 5 (25 pt)
Zij $T \subset \mathbb{R}^3$ het vlakdeel gedefinieerd door
$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0\,,\, y \geq 0\,,\, z \geq 0\,,\, x + y + z = 1\}$.
De normaal op T heeft een positieve component in de $\hat{\mathbf{k}}$ richting. Gegeven is het vectorveld:

$$\mathbf{G} = (x^2 - y^2)\hat{\mathbf{i}} + (2xy + z)\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}\,.$$

Bereken $\iint_T \mathbf{curl}\,\mathbf{G} \bullet \hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S$:

(a) (10 pt) Rechtstreeks.

(b) (15 pt) Met behulp van de stelling van Stokes.