

TENTAMEN INFI B

10 april 2019, 9.00-12.00

- Zet op elk blad dat je inlevert je naam en nummer.

• Schrijf het antwoord op iedere vraag op een apart blad.

- Laat bij elk antwoord zien hoe je er aan bent gekomen.
 - Het gebruik van een rekenmachine of ander zelf meegebracht materiaal is niet toegestaan.
 - Doe je best om LEESBAAR te schrijven. Onleesbare antwoorden kunnen fout gerekend worden.
-

Opgave 1 (15 pt)

- (a) (10 pt) Zij K de kubus met hoekpunten $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$. Geef een parametrisatie van een pad C dat over het oppervlak van K loopt en de punten $(0, 0, 0)$, $(0, \frac{1}{4}, 1)$ en $(1, 1, 1)$ verbindt.
- (b) (5 pt) Zij $C \subset \mathbb{R}^3$ de elliptische cilinder gedefinieerd door $2x^2 + y^2 = 1$. Het vlak $z = ax + by$ snijdt C . Bepaal waarden van a en b waarvoor deze doorsnede een cirkel is.

Opgave 2 (20 pt)

Zij $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{3x^4 + y^2}$.

- (a) (5 pt) Laat zien dat $f(x, y) \leq x^2 + y^2$.
- (b) (5 pt) Bepaal

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y),$$

of laat zien dat deze limiet niet bestaat.

Gegeven is $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y$ en het domein $KC \subset \mathbb{R}^2$, gedefinieerd door $KC = \{x^2 + y^2 \leq 9 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$.

- (c) (10 pt) Bepaal de minimale en maximale waarde die $g(x, y)$ aanneemt op KC .

Opgave 3 (20 pt)

Zij $H \subset \mathbb{R}^3$ het ijs hoorntje

$$H = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq 3z^2, z \geq 0\}.$$

Neem aan dat H een uniforme massaverdeling heeft. Bereken het massamiddelpunt van H . Hint: gebruik bolcoördinaten.

Opgave 4 (20 pt)

Het oppervlak $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ is de vereniging van

$$K = \{(x, y, z) \mid z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$$

en

$$C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}.$$

Gegeven is het vectorveld:

$$\mathbf{F} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}.$$

Bereken de flux van \mathbf{F} door $\Sigma = K \cup C$, met een naar buiten wijzende normaal:

- (a) (10 pt) Rechtstreeks.
- (b) (10 pt) Met behulp van de divergentiestelling.

Opgave 5 (25 pt)

De tetraëder (zonder grondvlak) $TZ \subset \mathbb{R}^3$ wordt gedefinieerd door $TZ = TZ_1 \cup TZ_2 \cup TZ_3$, met

$$TZ_1 = \{(x, y, z) \mid x + z \leq 1, y = 0, z \geq 0, x \geq 0\}$$

$$TZ_2 = \{(x, y, z) \mid x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

$$TZ_3 = \{(x, y, z) \mid y + z \leq 1, x = 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

Gegeven is het vectorveld:

$$\mathbf{G} = z\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}} + y\hat{\mathbf{k}}.$$

Bereken de flux van $\mathbf{curl} \mathbf{G}$ door TZ , met een naar buiten wijzende normaal:

- (a) (15 pt) Rechtstreeks.
- (b) (10 pt) Met behulp van de stelling van Stokes.