Tentamen Lineaire Algebra

29 januari 2019, 13:30-16:30 uur

- Bij dit tentamen mogen dictaten en boeken niet gebruikt worden.
- Een eenvoudige rekenmachine, hoewel niet nodig, is toegestaan, maar geen grafische rekenmachine of smartphone.
- Opgave 6b) is een bonusvraag.
- Schrijf op elk vel je naam, studentnummer en naam practicumleider (Carlo Verschoor (groep 1), Jetze Zoethout (groep 2), Luca Accornero (groep 3), Lasse Grimmelt (groep 4), Wilmer Smilde/Robin Verstraten (groep 5)).
- Laat bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt!!
- Veel succes!

1. Gegeven een drietal lijnen in $\mathbb{R}^3$ in parametervoorstelling,

$$l : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad m : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad n : \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) (1/2 pt) Laat zien dat l en m elkaar kruisen (dat wil zeggen niet evenwijdig en elkaar niet snijdend).

   (b) (1 pt) Bepaal de lijn evenwijdig aan n die zowel l als m snijdt.

2. Zij V de deelruimte in $\mathbb{R}^5$ opgespannen door $(1, 1, -1, 0, 1)^t$ en $(0, 1, 3, 0, 0)^t$. In $\mathbb{R}^5$ nemen we het dotproduct als inwendig product.

   (a) (1 pt) Bepaal een orthonormale basis van V.

   (b) (1/2 pt) Bepaal de loodrechte projectie van $(1, 0, 1, 0, 0)^t$ op V.

3. Deze opgave bestaat uit twee delen en gaat over doorsnijdingen van deelruimten.

   (a) (1 pt) Gegeven zijn de volgende deelruimten van $\mathbb{R}^4$:

      - $V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 | x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$
      - $U = \mathrm{Span}((1, 2, 0, -1)^t, (1, 1, 2, 0)^t, (0, -1, 1, 1)^t\}$

   Bepaal een basis van $V \cap U$.

   (b) (1 pt) Zij nu U, V een tweetal deelruimten van $\mathbb{R}^n$ stel dat $\dim(U) + \dim(V) > n$. Bewijs dat $U \cap V$ een vector $\neq \mathbf{0}$ bevat.

4. Zij V de vectorruimte bestaande uit polynomen van graad ≤ 3. Beschouw de lineaire afbeelding $T : V \to V$ gegeven door $T(p(x)) = (x+1)p'(x) - p(x)$ (hier is $p'(x)$ de afgeleide van $p(x)$).

   (a) (1 pt) Bepaal de matrix van T ten opzichte van de geordende basis $\{1, x, x^2, x^3\}$.

   (b) (1 pt) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren (in polynoomvorm) van T.

5. We beschouwen $\mathbb{R}^3$ als vectorruimte met het dotproduct als inwendig product. Zij $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ een vector met $|\mathbf{a}| = 1$. Beschouw de afbeelding $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeven door

$$T(\mathbf{x}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{x}.$$

   Hierin zijn $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$ en $\mathbf{a} \times \mathbf{x}$ het dotproduct en uitwendig product op $\mathbb{R}^3$.

   (a) (1/2 pt) Bewijs zonder uitschrijven in coördinaten (dus alleen gebruikmakend van de eigenschappen van inwendig en uitwendig product) dat T een lineaire afbeelding is.

   (b) (1 pt) Bewijs dat T een orthogonale afbeelding is. (Ter herinnering: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = |\mathbf{a}||\mathbf{x}| \cos \phi$ en $|\mathbf{a} \times \mathbf{x}| = |\mathbf{a}||\mathbf{x}| \sin \phi$ met ϕ de hoek tussen $\mathbf{a}$ en $\mathbf{x}$)

   (c) (1/2 pt) Bewijs dat T een draaiing van 90 graden is met $\mathbf{a}$ als draaiingsas.

6. Zij V de ruimte van 2×2-matrices met als inwendig product $\langle X, Y \rangle = \mathrm{Spoor}(XY^t)$. Zij M een symmetrische matrix en beschouw de lineaire afbeelding $A : X \mapsto XM + MX$ van V naar zichzelf.

   (a) (1 pt) Bewijs dat A een symmetrische afbeelding is (je mag gebruikmaken van het feit dat $\mathrm{Spoor}(PQ) = \mathrm{Spoor}(QP)$).

   (b) (**bonusvraag**: 1 pt) Stel dat de λ, μ de eigenwaarden van M zijn. Bewijs dat de eigenwaarden van A worden gegeven door $2\lambda, 2\mu, \lambda + \mu, \lambda + \mu$ (hint: probeer het eerst met M gelijk aan een diagonaalmatrix).