Opgave 1. (a) Er bestaat een $M > 0$ zodanig dat $|a_n| \leq M$ voor alle $n \geq 0$. Zij $\epsilon > 0$, dan is er een $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat voor alle $n > N$ geldt $|b_n| < \epsilon/M$ ($(b_n)_{n\geq 0}$ convergeert naar nul). Dus voor alle $n > N$ geldt $|a_n b_n| = |a_n||b_n| < \epsilon$. (b) Zij $\epsilon > 0$. Dan bestaat er een $\delta > 0$ zodanig dat voor alle $x, y \in V$ met $d(x, y) < \delta$ geldt $d(f(x), f(y)) < \epsilon$. Voorts bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat voor alle $m, n > N$ geldt $d(a_m, a_n) < \delta$ ($(a_n)_{n\geq 0}$ Cauchy). Derhalve, voor $m, n > N$ geldt $d(f(a_m), f(a_n)) < \epsilon$. (c) Stel wel en zij $\epsilon > 0$. Dan is er een $\delta > 0$ zodanig dat voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ met $|x-y| < \delta$ geldt $|e^x - e^y| < \epsilon$. Dus voor zulke x, y met $x > y$ geldt: $e^y|e^{x-y} - 1| = e^y(e^{x-y} - 1) < \epsilon$. Neem $x = y + \delta/2$ en $y \in \mathbb{R}$ willekeurig dan $e^y < \epsilon/(e^{\delta/2} - 1)$, d.w.z. de exponentiële functie is begrensd (tegenspraak met feit uit diktaat). (d) Beschouw de functie $x \in [0, 1] \mapsto F(x) = \int_0^x f(t)dt$ (f differentieerbaar, dus continu, dus Riemann-integreerbaar op $[0, 1]$). De hoofdstelling van de integraalrekening impliceert dat F differentieerbaar is met afgeleide $F' = f$. Dus $F'' = f'$. De formule van Taylor (met $a = 0$) geeft dat er voor elke $x \in]0, 1]$ er een $c \in]0, 1[$ bestaat zodanig dat $F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{1}{2}F''(c)x^2$ met $F(0) = 0$, $F'(0) = f(0)$. Aangezien $F'' = f'$ monotoon stijgend is geldt dat $f'(c) \leq f'(1)$.

Opgave 2. (a) Voor elke $x, y \in [a, b]$ met $x \leq y$ geldt $|F(x) - F(y)| = |\int_x^y f(t)dt| \leq \int_x^y |f(t)|dt$ (stelling diktaat) en dit is $\leq \int_x^y \gamma dt = \gamma|x - y|$ (behoud ongelijkheden onder integratie). (b) Dit volgt uit de Banach-vaste-punt-stelling en onderdeel (a).

Opgave 3. (Plaatje ontbreekt!) (a) Teken de grafiek van $y = x^2$ en $y = 2x$ die elkaar snijden in $(0, 0), (2, 4)$: dit is N_0. Identificeer 5 padsamenhangende deelverzamelingen in $\mathbb{R}^2 \setminus N_0$. Tekens langs positieve/negatieve y-as: $+/+$ en langs positieve/negatieve x-as: $+/-$. Teken in $(3, 7)$: $-$. Teken in $(1, \frac{3}{2})$: $-$. (b) Aangezien $f(x, y) = y^2 - 2xy - x^2y + 2x^3$ een polynoom is, bestaan de afgeleiden naar x, y en zijn ze gelijk aan $(-2y - 2xy + 6x^2, 2y - 2x - x^2)$ (standaard rekenregels differentiatie). Beide op nul stellen geeft $y = \frac{1}{2}x^2 + x$ en $-2y - 2xy + 6x^2 = -x^3 + 3x^2 - 2x = 0$ ofwel $x(x^2 - 3x + 2) = 0$ dus $x = 0, 1, 2$. We krijgen stationaire punten $(0, 0), (1, \frac{3}{2}), (2, 4)$. Dit zijn de *mogelijke* lokale maxima/minima. Uit het tekenschema van (a) volgt dat $(0, 0), (2, 4)$ geen lokale maxima/minima zijn. Zij D de padsamenhangende open deelverzameling van $\mathbb{R}^2 \setminus N_0$ die het punt $(1, \frac{3}{2})$ bevat. Dan is D het inwendige van de verzameling $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 2x, y \geq x^2, \}$. De functie $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (2x - y, y - x^2)$ is continu, $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \subset \mathbb{R}^2$ is gesloten en $X = g^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0})$ dus X is gesloten (diktaat). Voorts is X begrensd en dus neemt f een maximum en minimum aan op X (max-min-stelling). Aangezien het teken op D gelijk is aan $-$ volgt dat het punt $(1, \frac{3}{2})$ een lokaal minimum is.

Opgave 4. (a) Merk op: $g(x) \geq 0$ voor alle $x \in J$ dus $\inf_J g \geq 0$. Er bestaat een $x \in J \setminus \mathbb{Q}$ (gegeven) waarop dus $g(x) = 0$. Derhalve $\inf_J g \leq 0$. Voor alle $x \in J$ geldt $g(x) \leq f(x) \leq \sup_J f$ dus $\sup_J g \leq \sup_J f$. Zij nu $x \in J$, te bewijzen: $f(x) \leq \sup_J g$ (dan $\sup_J f \leq \sup_J g$). Zij $(r_n \in \mathbb{Q} \cap J)_{n\geq 0}$ een rij zodanig dat $\lim_{n\to\infty} r_n = x$. Zo een rij bestaat want x is een limietpunt van $\mathbb{Q} \cap J$ (gegeven: $\overline{\mathbb{Q} \cap J} = J$). Dus volgt $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} g(r_n)$ (f continu). Zij $\epsilon > 0$ willekeurig, dan is er een $n \in \mathbb{N}$ zodanig dat voor $n > N$ geldt $|f(x) - g(r_n)| < \epsilon$. Voor een $n > N$ volgt $f(x) = f(x) - g(r_n) + g(r_n) < \epsilon + \sup_J g$. (b) Voor elke $V = \{x_0 < \ldots < x_n\} \in \mathcal{V}([a, b])$ geldt $\underline{S}(g, V) = \sum_{i=1}^n \inf_{[x_{i-1}, x_i]} g \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0$ (vanwege (a)) en $\overline{S}(g, V) = \sum_{i=1}^n \sup_{[x_{i-1}, x_i]} g \cdot (x_i - x_{i-1}) = \overline{S}(f, V)$ (vanwege (a)). Derhalve $\underline{\int}_a^b g(x)dx = 0$ en $\overline{\int}_a^b g(x)dx = \overline{\int}_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ (f continu dus Riemann-integreerbaar). In het eerste geval $\int_a^b f(x)dx = 0$ en dus is g Riemann-integreerbaar. In het tweede geval $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \neq 0$ (hoofdstelling) dus g is niet Riemann-integreerbaar.