Tentamen analyse 11-4-2022 Je mag resultaten uit het boek/hoorcolleges vrij gebruiken, zolang je ernaar verwijst en tenzij je gevraagd wordt ze opnieuw te bewijzen. Alle 10 onderdelen hebben gelijk gewicht. Begin elk van de vier opgaven op een nieuw vel!

Opgave 1.

(a) Zij $(a_n)_{n\geq 0}$ een begrensde rij en $(b_n)_{n\geq 0}$ een convergente rij in $\mathbb{R}$ met

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Bewijs dat $(a_n b_n)_{n\geq 0}$ convergeert.

(b) Zij V, W metrische ruimten, $f : V \to W$ uniform continu en $(a_n)_{n\geq 0}$ een Cauchy-rij in V. Bewijs vanuit de definities dat $(f(a_n))_{n\geq 0}$ een Cauchy-rij is.

(c) Bewijs dat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ niet uniform continu is.

(d) Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differentieerbaar en f' monotoon stijgend op $\mathbb{R}$. Stel $f'(1) \geq 0$. Bewijs dat voor iedere $x \in [0, 1]$ geldt dat

$$\int_0^x f(t)dt \leq f(0)x + \tfrac{1}{2}f'(1).$$

Hint: Formule van Taylor.

Opgave 2.

(a) Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu zodanig dat $|f(x)| \leq \gamma$ voor alle $x \in [a, b]$. Stel f is Riemann-integreerbaar. Bewijs dat $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ Lipschitz-continu is.

(b) In (a), veronderstel bovendien dat $F([a, b]) \subset [a, b]$ (d.w.z. het beeld van F is bevat in $[a, b]$) en $\gamma < 1$. Bewijs dat er een unieke $c \in [a, b]$ bestaat zodanig dat $\int_a^c f(t)dt = c$.

Opgave 3. Beschouw de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x)$.

(a) Bepaal de verzameling $N_0 := f^{-1}(\{0\})$ en maak een plaatje van deze verzameling. Geef aan welke delen van $\mathbb{R}^2 \setminus N_0$ padsamenhangend zijn: dit hoef je *niet* formeel te bewijzen. Bepaal voor de padsamenhangende delen van $\mathbb{R}^2 \setminus N_0$ of f daar positief of negatief is.

(b) Bepaal de stationaire punten van f. Bewijs of dit lokale maxima, lokale minima of geen van beide zijn.

Opgave 4. Zij $a < b$. Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu zodanig dat $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in [a, b]$. Definieer $g : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{als} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [a, b] \\ 0 & \text{als} \quad x \notin \mathbb{Q} \cap [a, b]. \end{cases}$$

Ter herinnering: voor alle niet-lege begrensde $J \subset \mathbb{R}$ definiëren we $\sup_J f := \sup\{f(x) : x \in J\}$, $\inf_J f := \inf\{f(x) : x \in J\}$ en evenzo voor $\sup_J g$, $\inf_J g$.

(a) Bewijs dat voor ieder segment $J := [c, d] \subset [a, b]$ met $c < d$ geldt dat $\inf_J g = 0$ en $\sup_J g = \sup_J f$. Je mag gebruiken dat $J \setminus \mathbb{Q} \neq \varnothing$ en $\overline{\mathbb{Q} \cap J} = J$.

(b) Bewijs dat $\underline{\int_a^b} g(x)dx = 0$ en $\overline{\int_a^b} g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$. Is g Riemann-integreerbaar als $f(x) = 0$ voor alle $x \in [a, b]$? En als $f(x) = x$ voor alle $x \in [a, b]$? Bewijs je antwoorden.