1(a) Zij $\epsilon > 0$. Kies $\delta > 0$ kleiner dan het minimum van 1 en $\epsilon/(2^5+2^4+\cdots+1)$. Zij $x \in \mathbb{R}$ zodanig dat $|x-1| < \delta$. Dan $|x^2-1| = |x-1||x^5+x^4+\cdots+1| = |x-1|(x^5+x^4+\cdots+1) < \delta\cdot(2^5+2^4+\cdots+1) < \epsilon$. (b) Zij $\epsilon > 0$, dan is er een $N_1 \in \mathbb{N}$ zodanig dat voor alle $n > N_1$ geldt $|b_{2n}-\beta| < \epsilon$ en er is een $N_2 \in \mathbb{N}$ zodanig dat voor alle $n > N_2$ geldt $|b_{2n-1}-\beta| < \epsilon$. Zij $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat $N/2$ groter dan $N_1$ en $(N+1)/2$ groter dan $N_2$. Stel $n > N$ en schrijf $n = 2k$ voor $n$ even en $n = 2k-1$ voor $n$ oneven. Dan $k > N_1$ in het eerste geval en $k > N_2$ in het tweede geval, dus $|b_n - \beta| < \epsilon$. (c) We gebruiken de formule van Taylor. Vanwege de standaard rekenregels voor differentiatie is $f$ willekeurig vaak differentieerbaar en $f'(x) = -xe^{-x}$, $f''(x) = (x-1)e^{-x}$, $f'''(x) = (2-x)e^{-x}$. Dus voor iedere $x > 0$ is er een $c \in ]0,x[$ zondanig dat $f(x) - (1-\frac{1}{2}x^2) = \frac{1}{6}(2-c)e^{-c}x^3 < \frac{1}{3}x^3$.

2(a) Neem zonder beperking van algemeenheid $\gamma > 0$. Zij $\epsilon > 0$ en $0 < \delta < (\epsilon/\gamma)^{1/\alpha}$ (herinner dat de afbeelding $x \in \mathbb{R}_{>0} \mapsto x^\alpha$ strikt monotoon stijgend is). Dan voor alle $x, y \in V$ met $d_V(x,y) < \delta$ volgt $d_W(f(x), f(y)) \leq \gamma d_V(x,y)^\alpha < \gamma\delta^\alpha < \epsilon$. (b) Neem zonder beperking van algemeenheid $\gamma > 0$. Zij $a \in I$ vast en $\epsilon > 0$. Stel $0 < \delta < (\epsilon/\gamma)^{1/(\alpha-1)}$. Voor alle $a \neq x \in I$ met $|x-a| < \delta$ geldt dan $|f(x)-f(a)|/|x-a| < \gamma|x-a|^{\alpha-1} < \epsilon$. M.a.w. $f'(a) = 0$ voor alle $a \in I$ en dus is $f$ constant (lemma diktaat).

3 Aangezien $f$ differentieerbaar is, en dus continu, volgt dat $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ een primitieve van $f$ is (hoofdstelling van de integraalrekening). Voorts geldt dat $g$ differentieerbaar is op $J$ (met afgeleide $g'(y) = 1/f'(g(y))$). Uit de product-, som- en kettingregel volgt dat $G$ differentieerbaar is met afgeleide $g(y) + yg'(y) - F'(g(y))g'(y) = g(y) + yg'(y) - f(g(y))g'(y) = g(y)$ (merk op $g(f(y)) = y$).

4(a) Voor $n = 2$ volgt $2\cdot 1 - 1^2 = (-1)^2$. Stel de formule geldt voor $2, \ldots, n$. De hint geeft $(-1)^n = a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = a_{n+1}(a_{n-1}+a_n) - a_n(a_{n+1}+a_n) = a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2}$ dus de formule geldt voor $n+1$. (b) We hebben $b_n = (a_n + a_{n-1})/a_n = 1 + a_{n-1}/a_n = 1 + 1/b_{n-1}$. Vanwege 4(a) geldt $b_{2n} - b_{2n-1} = (a_{2n+1}a_{2n-1} - a_{2n}^2)/a_{2n}a_{2n-1} = (-1)^{2n}/a_{2n}a_{2n-1}$. (c) Er geldt $b_{2n} - b_{2n+2} = (a_{2n+1}a_{2n+2} - a_{2n+3}a_{2n})/a_{2n}a_{2n+2} = (-1)^{2n}/a_{2n}a_{2n+2}$ en $b_{2n+1} - b_{2n-1} = (a_{2n+2}a_{2n-1} - a_{2n}a_{2n+1})/a_{2n+1}a_{2n-1} = (-1)^{2n}/a_{2n+1}a_{2n-1}$. We zien dat de rij $(b_{2n})_{n\geq 1}$ (strikt) monotoon dalend is en $(b_{2n-1})_{n\geq 1}$ (strikt) monotoon stijgend. Beide rijen zijn naar onderen begrens door 1 en naar boven begrensd door 2 (4(b)) en dus convergeren ze (stelling diktaat). (d) Het is evident dat $\lim_{n\to\infty} 1/a_{2n}a_{2n-1} = 0$ (omdat $a_n \geq n-1$ en $\lim_{n\to\infty} 1/(2n-1)(2n-2) = 0$). Uit 4(b), (c) volgt dat $\lim_{n\to\infty} b_{2n} = \lim_{n\to\infty} b_{2n-1} =: \beta$. Uit 1(b) volgt $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$. We gebruiken opnieuw 4(b) om te concluderen dat $\beta = 1 + \beta^{-1}$. Oplossen en gebruiken dat $\beta > 0$ geeft $\beta = (1+\sqrt{5})/2$.