Tentamen Lineaire algebra 2 (WISB108)
Maandag 31 januari 2022 13.30-16.30 (17.00 voor studenten met recht op extra tijd)

Docent: *Barbara van den Berg*

- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.
- **Gebruik voor iedere opgave een apart vel!**
- Het gebruik van het dictaat en college-aantekeningen is toegestaan. Het gebruikt van andere hulpmiddelen zoals telefoons, laptops, rekenmachines of andere bronnen is **NIET** toegestaan.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en waarom je antwoord voldoet.
- Het tentamen heeft vijf opgaven. De verdeling van de punten is als volgt:
  - opgave 1: 20 punten
  - opgave 2: 20 punten
  - opgave 3: 25 punten
  - opgave 4: 15 punten
  - opgave 5: 20 punten

Opgave 1 (NIEUW VEL PAPIER)

(*20 punten*) We definiëren voor iedere $a \in \mathbb{R}$ de lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ door

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 8x + 3y \\ ax - 7y \end{pmatrix}.$$

Je mag in het vervolg aannemen dat de afbeelding T lineair is. Bepaal voor welke waarde van a er een geordende basis B bestaat zodat

$$T_B^B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Geef daarbij ook een concreet voorbeeld van een geordende basis B met de bovenstaande eigenschap.

Opgave 2 (NIEUW VEL PAPIER)

(*20 punten*)

Laat W het vlak zijn in $\mathbb{R}^3$ gegeven door de vergelijking $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Bereken de loodrechte projectie van $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ op W ten aanzien van het standaardinproduct op $\mathbb{R}^3$.

Opgave 3 (NIEUW VEL PAPIER)

(*25 punten*)

Laat $C^\infty(\mathbb{R})$ de vectorruimte zijn van oneindig vaak differentieerbare functies op $\mathbb{R}$ en V de lineaire deelruimte van $C^\infty(\mathbb{R})$ gedefinieerd door

$$V = \text{Span}(\sin(2x), \cos(2x)),$$

het opspansel van de functies $\sin(2x)$ en $\cos(2x)$ in $C^\infty(\mathbb{R})$.

(a). (*4 punten*) Laat zien dat $B = \{\sin(2x), \cos(2x)\}$ een basis is van V.

We definiëren de lineaire afbeelding $A : V \to V$ door:

$$A(f) = f'' + 5f' + 6f$$

waarbij f' de eerste afgeleide is van f en f'' de tweede afgeleide van f. Je mag in het vervolg aannemen dat de afbeelding A inderdaad lineair is en dat het beeld van V weer binnen V ligt.

(b). (*4 punten*) Geef de matrix van A ten opzichte van de basis B.

(c). (*4 punten*) Is de afbeelding A gedefinieerd op V injectief?

(d). (*4 punten*) Is de afbeelding A gedefinieerd op V diagonaliseerbaar over $\mathbb{R}$?

(e). (*5 punten*) De afbeelding A kunnen we uitbreiden op $C^\infty(\mathbb{R})$ tot de afbeelding $A : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ gedefinieerd door

$$A(f) = f'' + 5f' + 6f.$$

Geef een basis voor de kern van A in $C^\infty(\mathbb{R})$.

(f). (*4 punten*) Is de afbeelding A gedefinieerd op $C^\infty(\mathbb{R})$ injectief?

Opgave 4 (NIEUW VEL PAPIER)

(*15 punten*) Laat V een eindig dimensionale vectorruimte zijn met inproduct en laat $W \subseteq V$ een lineaire deelruimte zijn van V met dimensie ongelijk aan 0 en strikt kleiner dan de dimensie van V. Laat $P_W : V \to V$ de loodrechte projectie zijn van V op W. Welke van de volgende beweringen zijn waar?
NB: bewijs je bewering! Dat wil zeggen: als de bewering waar is, geef dan een bewijs van de bewering en als de bewering niet waar is, geef dan een tegenvoorbeeld en laat zien dat je voorbeeld voldoet.

(a). (*5 punten*) Alle eigenwaarden van P_W zijn gelijk aan ± 1.

(b). (*5 punten*) Voor alle $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$ geldt $\|P_W(\mathbf{v}) - P_W(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$.

(c). (*5 punten*) De afbeelding P_W is diagonaliseerbaar.

Opgave 5 (NIEUW VEL PAPIER)

(*20 punten*) Laat V een eindig dimensionale vectorruimte zijn met inproduct en $A : V \to V$ een lineaire afbeelding. Welke van de volgende beweringen zijn waar?
NB: bewijs je bewering! Dat wil zeggen: als de bewering waar is, geef dan een bewijs van de bewering en als de bewering niet waar is, geef dan een tegenvoorbeeld en laat zien dat je voorbeeld voldoet.

(a). (*5 punten*) Als A orthogonaal is en $\mathbf{v}$ is een eigenvector van A, dan geldt voor iedere $\mathbf{w} \in V$ dat als $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ dan is $\langle \mathbf{v}, A(\mathbf{w}) \rangle = 0$.

(b). (*5 punten*) Als A orthogonaal is en $\mathbf{v}$ is een eigenvector van A, dan geldt voor iedere $\mathbf{w} \in V$ dat als $\langle \mathbf{v}, A(\mathbf{w}) \rangle = 0$ dan is $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$.

(c). (*5 punten*) Als alle eigenwaarden van A gelijk zijn aan ± 1, dan is A een orthogonale afbeelding.

(d). (*5 punten*) Als V een orthonormale basis heeft van eigenvectoren van A met reële eigenwaarden, dan is A een symmetrische afbeelding.

Opgave 1 (NIEUW VEL PAPIER)

(*20 punten*) We definiëren voor iedere $a \in \mathbb{R}$ de lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ door

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 8x + 3y \\ ax - 7y \end{pmatrix}.$$

Je mag in het vervolg aannemen dat de afbeelding T lineair is. Bepaal voor welke waarde van a er een geordende basis B bestaat zodat

$$T_B^B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Geef daarbij ook een concreet voorbeeld van een geordende basis B met de bovenstaande eigenschap.

Uitwerking

Eerst bepalen we de matrix van T ten opzichte van de standaard basis E. Er geldt $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)_E = \begin{pmatrix} 8 \\ a \end{pmatrix}$ en $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)_E = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$, dus is

$$T_E^E = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ a & -7 \end{pmatrix}.$$

Uit de gewenste vorm van T_B^B lezen we af dat T eigenwaarden -1 en 2 moet hebben, dit betekent dat het karakteristiek polynoom van T gelijk moet zijn aan $(\lambda+1)(\lambda-2) = \lambda^2 - \lambda - 2$. Met behulp van de matrix T_E^E kunnen we ook uitrekenen dat het karakteristieke polynoom van T gelijk is aan

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & 3 \\ a & -7-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(-7-\lambda) - 3a = \lambda^2 - \lambda - 56 - 3a.$$

Door dit gelijk te stellen aan $\lambda^2 - \lambda - 2$ vinden we $-2 = 56 - 3a$, en dus $a = -18$. Voor $a = -18$ heeft T dus eigenwaarden $\lambda_1 = -1$ en $\lambda_2 = 2$. Omdat deze eigenwaarden verschillend zijn, zijn de bijbehoordende eigenvectoren onafhankelijk. Deze vormen dus een basis. Noem deze basis $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$. Er geldt nu dat

$$T_B^B = \begin{pmatrix} T(\mathbf{b}_1)_B & T(\mathbf{b}_2)_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

dus dit is de basis waarnaar we op zoek zijn.

Tenslotte moeten we dus nog de eigenvectoren van T vinden. De eigenruimte van $\lambda_1 = -1$ is de nulruimte van $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -18 & -6 \end{pmatrix}$, dus een eigenvector is $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

De eigenruimte van $\lambda_2 = 2$ is de nulruimte van $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -18 & -9 \end{pmatrix}$, dus een eigenvector is $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

De basis

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

voldoet dus.

Opgave 2 (NIEUW VEL PAPIER)

(20 punten)

Laat W het vlak zijn in $\mathbb{R}^3$ gegeven door de vergelijking $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Bereken de loodrechte projectie van $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ op W ten aanzien van het standaardinproduct op $\mathbb{R}^3$.

Uitwerking

We bepalen eerst een basis van W. De vectoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ zijn onafhankelijk en spannen W op, dus vormen ze een basis van W.

Nu passen we het Gram-Schmidt procédé toe om hier een orthonormale basis van te maken. Neem

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$$

en definieer

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Nu normaliseren we $\mathbf{w}_1$ en $\mathbf{w}_2$, dit geeft een orthonormale basis $E = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ van W met

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

De loodrechte projectie van $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ op W wordt dus gegeven door

$$\begin{aligned}
P_{\mathbf{w}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right) &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \cdot -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ter controle rekenen we uit dat $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ inderdaad in het vlak W ligt, en dat $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ een normaal vector van W is.

Een beknopte uitwerking van opgave 3

a) We bewijzen eerst dat B onafhankelijk is; d.w.z. dat $\lambda\sin(2x) + \mu\cos(2x) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ tot gevolg heeft dat zowel λ als μ nul zijn. Invullen van $x = 0$ en $x = \pi/4$ levert op dat $\mu = 0$ en $\lambda = 0$ respectievelijk, dus B is onafhankelijk. Vermits V het opspansel van B is, is B een basis van V.

b) Er geldt $A(\sin(2x))_B = (2\sin(2x) + 10\cos(2x))_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$ en

$A(\cos(2x))_B = (2\cos(2x) - 10\sin(2x))_B = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \end{pmatrix}$, dus

$$A_B^B = \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Ja, want $\det(A_B^B) = 4 - (-100) = 104 \neq 0 \Leftrightarrow$ de nulruimte van A_B^B is triviaal $\Leftrightarrow A_B^B$ is injectief $\Leftrightarrow A$ is injectief.

d) Merk op dat A diagonaliseerbeer is $\Leftrightarrow A_B^B$ diagonaliseerbaar is. Echter, de eigenwaarden van A_B^B zijn de nulpunten van

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & -10 \\ 10 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 - (-100) = (\lambda - 2)^2 + 100$$

maar $(\lambda - 2)^2 + 100 \geqslant 100 > 0$ voor alle reële λ, dus heeft A_B^B geen reële eigenwaarden en derhalve is-ie niet diagonaliseerbaar over $\mathbb{R}$.

e) De kern van A bestaat uit alle $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ die voldoen aan $f'' + 5f' + 6f = 0$; deze differentiaalvergelijking heeft karakteristieke vergelijking $0 = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda + 3)$, dus $\{e^{-2x}, e^{-3x}\}$ is een basis van de kern van A.

f) Nee, vermits de kern niet triviaal is (de basis is immers niet leeg).

UITWERKING OPGAVE 4 – EINDTENTAMEN LIAL

a) "Alle eigenwaarden van P_W zijn gelijk aan ± 1."

$\boxed{\text{ONWAAR}}$

Neem bijv. in $\mathbb{R}^2$ de projectie op de x-as. In dat geval hebben we $V = \mathbb{R}^2$ en $W = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.
Dan geldt

$$(P_W)_E^E = \left(P_W \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_E \quad P_W \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_E \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Laten we de eigenwaarden van P_W berekenen:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) = \lambda(\lambda - 1) = 0$$

De oplossingen zijn $\lambda = \underline{\underline{0}}, 1$. Zo hebben we een projectie gevonden met een eigenwaarde ongelijk ± 1.

<u>optie 2</u> zonder concreet tegenvoorbeeld.

Het is gegeven dat $\dim(W) < \dim(V)$, i.e. er bestaat $v \in V$ met $v \notin W$. Er geldt per definitie dat $v - P_W(v) \in W^\perp$ en $v - P_W(v) \neq 0$ omdat $v \notin W$.
Dit betekent dat $P_W(v - P_W(v)) = 0$, i.e. $\ker(P_W)$ is niet triviaal. Maar: alle ~~vectoren~~ niet-triviale vectoren in $\ker(P_W)$ zijn eigenvectoren met eigenwaarde $0 \neq \pm 1$.

b) "Voor alle $v, u \in V$ geldt $\|P_W(v) - P_W(u)\| = \|v - u\|$."

$\boxed{\text{ONWAAR}}$

We gebruiken hetzelfde voorbeeld als in a), en nemen nu $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

~~Voor~~ Dit geeft $P_W(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $P_W(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dan $\|v - u\| = \left\|\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

en $\|P_W(v) - P_W(u)\| = \left\|\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1} = 1$.

c) "De afbeelding P_W is diagonaliseerbaar."

$\boxed{\text{WAAR}}$

Volgens Stelling 9.3.2 geldt voor alle $x, y \in V$ dat

$$\langle x, P_W(y) \rangle = \langle P_W(x), y \rangle .$$

Dit betekent dat P_W een symmetrische afbeelding is (zie definitie in 10.1).

Dan volgt uit Stelling 10.1.3 dat er een orthonormale basis⊛ van eigenvectoren van P_W met reële eigenwaarden, i.e. P_W is diagonaliseerbaar ($(P_W)_B^B$ is diagonaal, waar B die basis uit St. 10.1.3).

⊛ Deze basis is van $\underline{\underline{V}}$, niet van $\underline{W}$!

LET OP! De loodrechte projectie is $\underline{\text{géén}}$ orthogonale afbeelding!!! Zie bijvoorbeeld het tegenvoorbeeld in b):

$$\|v\| = 1 \quad \text{en} \quad \|P_W(v)\| = 0 \;!!$$

Dus P_W is $\underline{\text{niet}}$ per se lengtebewarend.

Opgave 1 (NIEUW VEL PAPIER)

(*20 punten*) Laat V een eindig dimensionale vectorruimte zijn met inproduct en $A : V \to V$ een lineaire afbeelding. Welke van de volgende beweringen zijn waar?
NB: bewijs je bewering! Dat wil zeggen: als de bewering waar is, geef dan een bewijs van de bewering en als de bewering niet waar is, geef dan een tegenvoorbeeld en laat zien dat je voorbeeld voldoet.

(a). (*5 punten*) Als A orthogonaal is en $\mathbf{v}$ is een eigenvector van A, dan geldt voor iedere $\mathbf{w} \in V$ dat als $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ dan is $\langle \mathbf{v}, A(\mathbf{w}) \rangle = 0$.

(b). (*5 punten*) Als A orthogonaal is en $\mathbf{v}$ is een eigenvector van A, dan geldt voor iedere $\mathbf{w} \in V$ dat als $\langle \mathbf{v}, A(\mathbf{w}) \rangle = 0$ dan is $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$.

(c). (*5 punten*) Als alle eigenwaarden van A gelijk zijn aan ± 1, dan is A een orthogonale afbeelding.

(d). (*5 punten*) Als V een orthonormale basis heeft van eigenvectoren van A met reële eigenwaarden, dan is A een symmetrische afbeelding.

Uitwerking

(a) (*5 punten*) Deze bewering is waar. Bewijs: Omdat A orthogonaal is, geldt voor iedere $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ dat $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle A(\mathbf{v}), A(\mathbf{w}) \rangle$. Gegeven is dat $\mathbf{v}$ een eigenvector is van A, dus er is een $\lambda \in \mathbb{C}$ zodat $A(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$. We zien dat

$$0 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle A(\mathbf{v}), A(\mathbf{w}) \rangle = \langle \lambda \mathbf{v}, A(\mathbf{w}) \rangle = \lambda \langle \mathbf{v}, A(\mathbf{w}) \rangle.$$

Bovendien volgt uit het gegeven dat A orthogonaal is dat $\lambda \neq 0$ want er geldt dat $\|\mathbf{v}\| = \|A(\mathbf{v})\| = \|\lambda \mathbf{v}\| = |\lambda| \|\mathbf{v}\|$, dus $|\lambda| = 1$. We concluderen dat $\langle \mathbf{v}, A(\mathbf{w}) \rangle = 0$.

(b) (*5 punten*) Deze bewering is waar. Bewijs: Uit de berekening onder (a) volgt omgekeerd dat als $\langle \mathbf{v}, A(\mathbf{w}) \rangle = 0$ dan is $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$.

(c) (*5 punten*) Deze bewering is onwaar. Een tegenvoorbeeld is de lineaire afbeelding gedefinieerd op $\mathbb{R}^2$ gegeven door matrixvermenigvulding met

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De eigenwaarden hiervan zijn gelijk aan 1 (want $(1 - \lambda)^2 = 0$ is de eigenwaardenvergelijking) maar de afbeelding is niet orthogonaal, er geldt bijvoorbeeld dat $(0, 1)^t$ lengte 1 heeft, terwijl het beeld van deze vector gelijk is aan $(1, 1)^t$ en die vector heeft lengte $\sqrt{(}2)$, dus A behoudt geen lengten.

(d) (*5 punten*) Deze bewering is waar Bewijs: Laat B de orthonormale basis zijn van eigenvectoren van A, dan is A_B^B een diagonaalmatrix (met op de diagonaal de eigenwaarden), want voor iedere basisvector $\mathbf{b_i}$ geldt $A(\mathbf{b_i})_B = (\lambda_i \mathbf{b_i})_B = \lambda_i \mathbf{e_i}$, waarbij $\mathbf{e_i}$ de i^e standaardbasis is van $\mathbb{R}^n$. We zien dat de afbeelding A ten opzichte van een orthonormale basis gelijk is aan een symmetrische matrix, dus is A volgens stelling 10.1.2 een symmetrische afbeelding.