Tentamen Lineaire algebra 2 (WISB108)
Maandag 31 januari 2022 13.30-16.30 (17.00 voor studenten met recht op extra tijd)

Docent: *Barbara van den Berg*

- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.
- **Gebruik voor iedere opgave een apart vel!**
- Het gebruik van het dictaat en college-aantekeningen is toegestaan. Het gebruikt van andere hulpmiddelen zoals telefoons, laptops, rekenmachines of andere bronnen is **NIET** toegestaan.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en waarom je antwoord voldoet.
- Het tentamen heeft vijf opgaven. De verdeling van de punten is als volgt:
  - opgave 1: 20 punten
  - opgave 2: 20 punten
  - opgave 3: 25 punten
  - opgave 4: 15 punten
  - opgave 5: 20 punten

Opgave 1 (NIEUW VEL PAPIER)

(*20 punten*) We definiëren voor iedere $a \in \mathbb{R}$ de lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ door

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 8x + 3y \\ ax - 7y \end{pmatrix}.$$

Je mag in het vervolg aannemen dat de afbeelding T lineair is. Bepaal voor welke waarde van a er een geordende basis B bestaat zodat

$$T_B^B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Geef daarbij ook een concreet voorbeeld van een geordende basis B met de bovenstaande eigenschap.

Opgave 2 (NIEUW VEL PAPIER)

(*20 punten*)

Laat W het vlak zijn in $\mathbb{R}^3$ gegeven door de vergelijking $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Bereken de loodrechte projectie van $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ op W ten aanzien van het standaardinproduct op $\mathbb{R}^3$.

Opgave 3 (NIEUW VEL PAPIER)

(*25 punten*)

Laat $C^\infty(\mathbb{R})$ de vectorruimte zijn van oneindig vaak differentieerbare functies op $\mathbb{R}$ en V de lineaire deelruimte van $C^\infty(\mathbb{R})$ gedefinieerd door

$$V = \mathrm{Span}(\sin(2x), \cos(2x)),$$

het opspansel van de functies $\sin(2x)$ en $\cos(2x)$ in $C^\infty(\mathbb{R})$.

(a). (*4 punten*) Laat zien dat $B = \{\sin(2x), \cos(2x)\}$ een basis is van V.

We definiëren de lineaire afbeelding $A : V \to V$ door:

$$A(f) = f'' + 5f' + 6f$$

waarbij f' de eerste afgeleide is van f en f'' de tweede afgeleide van f. Je mag in het vervolg aannemen dat de afbeelding A inderdaad lineair is en dat het beeld van V weer binnen V ligt.

(b). (*4 punten*) Geef de matrix van A ten opzichte van de basis B.

(c). (*4 punten*) Is de afbeelding A gedefinieerd op V injectief?

(d). (*4 punten*) Is de afbeelding A gedefinieerd op V diagonaliseerbaar over $\mathbb{R}$?

(e). (*5 punten*) De afbeelding A kunnen we uitbreiden op $C^\infty(\mathbb{R})$ tot de afbeelding $A : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ gedefinieerd door

$$A(f) = f'' + 5f' + 6f.$$

Geef een basis voor de kern van A in $C^\infty(\mathbb{R})$.

(f). (*4 punten*) Is de afbeelding A gedefinieerd op $C^\infty(\mathbb{R})$ injectief?

Opgave 4 (NIEUW VEL PAPIER)

(*15 punten*) Laat V een eindig dimensionale vectorruimte zijn met inproduct en laat $W \subseteq V$ een lineaire deelruimte zijn van V met dimensie ongelijk aan 0 en strikt kleiner dan de dimensie van V. Laat $P_W : V \to V$ de loodrechte projectie zijn van V op W. Welke van de volgende beweringen zijn waar?
NB: bewijs je bewering! Dat wil zeggen: als de bewering waar is, geef dan een bewijs van de bewering en als de bewering niet waar is, geef dan een tegenvoorbeeld en laat zien dat je voorbeeld voldoet.

(a). (*5 punten*) Alle eigenwaarden van P_W zijn gelijk aan ± 1.

(b). (*5 punten*) Voor alle $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$ geldt $\|P_W(\mathbf{v}) - P_W(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$.

(c). (*5 punten*) De afbeelding P_W is diagonaliseerbaar.

Opgave 5 (NIEUW VEL PAPIER)

(*20 punten*) Laat V een eindig dimensionale vectorruimte zijn met inproduct en $A : V \to V$ een lineaire afbeelding. Welke van de volgende beweringen zijn waar?
NB: bewijs je bewering! Dat wil zeggen: als de bewering waar is, geef dan een bewijs van de bewering en als de bewering niet waar is, geef dan een tegenvoorbeeld en laat zien dat je voorbeeld voldoet.

(a). (*5 punten*) Als A orthogonaal is en $\mathbf{v}$ is een eigenvector van A, dan geldt voor iedere $\mathbf{w} \in V$ dat als $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ dan is $\langle \mathbf{v}, A(\mathbf{w}) \rangle = 0$.

(b). (*5 punten*) Als A orthogonaal is en $\mathbf{v}$ is een eigenvector van A, dan geldt voor iedere $\mathbf{w} \in V$ dat als $\langle \mathbf{v}, A(\mathbf{w}) \rangle = 0$ dan is $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$.

(c). (*5 punten*) Als alle eigenwaarden van A gelijk zijn aan ± 1, dan is A een orthogonale afbeelding.

(d). (*5 punten*) Als V een orthonormale basis heeft van eigenvectoren van A met reële eigenwaarden, dan is A een symmetrische afbeelding.