Herkansing Lineaire algebra 2 (WISB108)
19 april 2022, 13.30-16.30
(17.00 voor studenten met recht op extra tijd)

Docent: *Barbara van den Berg*

- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.
- Het gebruik van een spiekbrief bestaande uit een eenzijdig beschreven A4tje in eigen handschrift met eigen tekst is toegestaan. Het gebruik van het dictaat en college-aantekeningen of andere hulpmiddelen zoals telefoons, laptops, rekenmachines of andere bronnen is **NIET** toegestaan.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en waarom je antwoord voldoet.
- Het tentamen heeft vijf opgaven. De verdeling van de punten is als volgt:
  - opgave 1: 30 punten
  - opgave 2: 15 punten
  - opgave 3: 15 punten
  - opgave 4: 15 punten
  - opgave 5: 25 punten

Opgave 1

In de volgende deelvragen wordt steeds gevraagd om een voorbeeld te geven voor een gegeven situatie. Laat zien dat je voorbeeld inderdaad voldoet aan wat er gevraagd wordt. Indien van toepassing, mag je in de verschillende onderdelen dezelfde voorbeelden gebruiken en verwijzen naar bewijzen uit de vorige onderdelen.

(a). (*4 punten*) Laat $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 1}$. Geef een voorbeeld van een basis B van V en een lineaire afbeelding $A : V \to V$ zodat

$$A_B^B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Je hoeft daarbij niet expliciet te bewijzen dat B inderdaad een basis is van V en dat je afbeelding A lineair is.

(b). (*9 punten*) Geef een voorbeeld van een 2×2 matrix A zodat alle coëfficiënten van A ongelijk zijn aan 0 en zodat A eigenwaarden 2 en 3 heeft.

(c). (*8 punten*) Geef een voorbeeld van een 2×2 matrix A zodat alle coëfficiënten van A ongelijk zijn aan 0 en zodat A diagonaliseerbaar is over $\mathbb{R}$.

(d). (*9 punten*) Geef een voorbeeld van een 2×2 matrix A die niet diagonaliseerbaar is over $\mathbb{R}$.

Opgave 2

(a). (*11 punten*) Vind alle oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y'' - 6y' + 9y = 6 + 18x^2.$$

(b). (*4 punten*) Is de oplossingsverzameling van de differentiaalvergelijking uit (a) een lineaire deelruimte van $C(\mathbb{R})$, de vectorruimte van continue functies op $\mathbb{R}$? Zo nee, waarom niet? Zo ja, wat is de dimensie van de lineaire deelruimte?

Opgave 3

Laat V de vectorruimte zijn gegeven door $V = \text{Span}(e^{2x}, e^{3x})$. Laat verder gegeven zijn de drie geordende basissen B, C en D van V gedefinieerd door:

$$\begin{aligned} B &= \{e^{2x}, e^{3x}\} \\ C &= \{e^{2x} - 3e^{3x}, -e^{2x} + 4e^{3x}\} \\ D &= \{2e^{2x} + 5e^{3x}, e^{2x} + 3e^{3x}\}. \end{aligned}$$

Je hoeft voor het vervolg niet te laten zien dat B, C en D basissen zijn van V.

(a). (*8 punten*) Gegeven is de vector $f(x) = 7e^{2x} - 8e^{3x}$ in V. Bepaal de coördinaten van f ten opzichte van B en C, dat wil zeggen, bepaal f_B en f_C.

(b). (*7 punten*) Geef de matrix I_D^C en bepaal f_D.

Opgave 4

Laat W het vlak in $\mathbb{R}^3$ zijn gegeven door de parametrisatie

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \mu \\ 3\mu \\ 2\lambda + 3\mu \end{pmatrix}$$

voor $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(a). (*10 punten*) Bereken de loodrechte projectie $P_W(\mathbf{v})$ van $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 19 \\ 1 \end{pmatrix}$ op W.

(b). (*5 punten*) Wat is de loodrechte projectie van $\mathbf{v}$ op $W^\perp$?

Opgave 5

Zijn de onderstaande beweringen waar of onwaar?

NB: bewijs je bewering! Dat wil zeggen: als je een tegenvoorbeeld geeft, laat dan zien waarom je voorbeeld voldoet, en als de bewering waar is, geef dan een bewijs van de bewering.

(a). (*8 punten*) Er bestaat een lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ met de volgende twee eigenschappen:

(i) A is orthogonaal ten opzichte van het standaard inproduct op $\mathbb{R}^2$; en

(ii) A is niet diagonaliseerbaar over $\mathbb{R}$.

(b). (*8 punten*) Laat $\langle , \rangle$ het standaard inproduct zijn op $\mathbb{R}^2$. Er bestaat een lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ met de volgende twee eigenschappen:

(i) voor iedere $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ geldt dat $\langle \mathbf{x}, \mathbf{A}(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle$; en

(ii) A is niet diagonaliseerbaar.

(c). (*9 punten*) Laat

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

dan definieert $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^{\mathbf{t}} \mathbf{S} \mathbf{y}$ een inproduct op $\mathbb{R}^2$.